

# פיזיקה למתמטיקאים 8832001

פרק 12 - יחסות פרטית -

תוכן העניינים

1. טרנספורמציות לורנץ למיקום והזמן.....1
2. טרנספורמציות לורנץ למהירות.....6
3. תרגילים לטרנספורמציות מיקום ומהירות.....7

## טרנספורמצית לורנץ למיקום והזמן:

### רקע:

תורת היחסות הפרטית עוסקת בתיאור של מאורעות מנקודת המבט של צופים הנמצאים במערכות ייחוס שונות.

מערכות הייחוס תמיד יהיו מערכות אינרציאליות (צופים שזזים במהירות קבועה ביחס למערכת הכוכבים).

### הגדרת מאורע:

מאורע הוא אירוע פיזיקלי המוגדר בזמן ובמרחב. כל מאורע ניתן לתאר ע"י ארבע קואורדינטות  $(x, y, z, t)$ .

### עקרונות יסוד בתורת היחסות:

חוקי הפיזיקה זהים בכל המערכות האינרציאליות. האור אינו צריך תווך בשביל לעבור בו. מהירות האור קבועה וזהה בכל מערכות הייחוס. אף גוף אינו יכול לנוע יותר מהר ממהירות האור בוואקום. כתוצאה מכך מדידת הזמן שונה בין מערכות הייחוס. הזמן הופך לקואורדינטה רביעית (ביחד עם  $x, y, z$ ) שעוברת טרנספורמציה.

**טרנספורמציות לורנץ למיקום והזמן:**

$$x' = \gamma_0(x - v_0 t)$$

$$t' = \gamma_0 \left( t - \frac{v_0 x}{c^2} \right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$\beta = \frac{v_0}{c}$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

**טרנספורמציה הפוכה:**

$$x = \gamma_0(x' + v_0 t')$$

$$t = \gamma_0 \left( t' + \frac{v_0 x'}{c^2} \right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

**תנאים לשימוש בטרנספורמציות לורנץ:**

הצירים של המערכות מקבילים.

בזמן:  $t = t' = 0$  הראשיות מתלכדות.

**המערכת העצמית:**

מערכת עצמית היא מערכת בה המאורע הנצפה נמצא במנוחה.

**זמן עצמי  $\tau$**  - מוגדר להיות הפרש הזמנים בין שני מאורעות כפי שהוא נמדד במערכת העצמית שלהם.

**אורך עצמי** - האורך של גוף כפי שנמדד במערכת בו הגוף נמצא במנוחה.

התכווצות האורך:

$$l = \frac{l_0}{\gamma_0}$$

$l_0$  - האורך העצמי

התארכות הזמן:

$$\Delta t = \gamma_0 \tau > \tau$$

שינוי זווית במדידת אורך:

$$\tan \theta = \gamma_0 \tan \theta'$$

$\theta'$  - זווית במערכת העצמית

אפקט דופלר היחסותי:

זמן המחזור של הגל:

$$T = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \tau$$

אורך הגל:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \lambda'$$

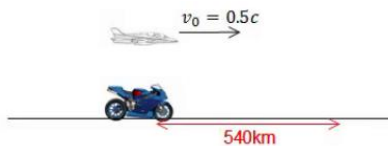
$\lambda'$  - אורך הגל במערכת העצמית

תדירות הגל:

$$f = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} f'$$

$f'$  - תדירות במערכת העצמית

### שאלות:

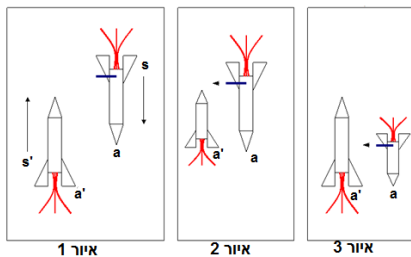


#### 1) מציאת מהירות ומיקום אופנוע

אופנוע נוסע במהירות קבועה בקו ישר. צופה על הקרקע מודד כי האופנוע נסע מרחק של 540km.

- צופה הנע במטוס ממש מהיר  $v = 0.5c$ , בכיוון נסיעת האופנוע, מודד כי משך זמן נסיעת האופנוע היה 0.01 שניה.
- א. מצא את מהירות האופנוע במערכת כדה"א.
- ב. מצא את המרחק שעבר האופנוע כפי שמדד הצופה במטוס.

#### 2) בדיקת ירי



שתי חלליות בעלות אורך מנוחה זהה, עוברות זו במקביל לזו במהירות גבוהה.

בזנב החללית S מצוי תותח המכוון בניצב לכיוון תנועת החללית ולעבר מסלול התנועה של החללית s' (איור 1).

בחללית S מתבצעת בדיקת ירי בתותח ברגע

שהנקודה a בראש החללית מתלכדת עם הנקודה a' (זנב s').

מכיוון שאורך החללית s' קצר מהאורך העצמי בחללית ב-s מניחים כי הטיל יפספס את החללית השנייה (איור 2).

אולם במערכת s' אורך החללית S קצר מהאורך העצמי ולכן כאשר a ו-a' מתלכדות האסטרונאוט S יפגע (איור 3). ישבי את הפרדוקס.

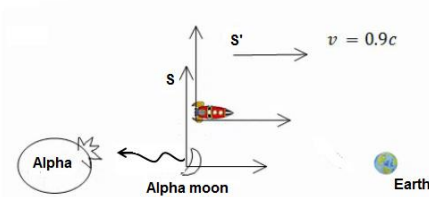
**(3) מוט פולט אור לסירוגין**

מוט בעל אורך  $l_0$  נע במהירות  $V$  נתונה ביחס לכדה"א.  
נתון כי ב- $t = 0$  הקצה השמאלי של המוט נמצא ב- $x = x' = 0$ .  
ברגע זה המוט פולט אור מקצהו הימני.  
לאחר זמן  $\tau$  המוט פולט אור מקצהו הימני.  
מצא את הפרש הזמנים כפי שרואה אותם צופה מכדה"א  
(הפרש הזמנים בין הגעת האור משני המאורעות לראשית).



**(4) פיצוץ בכוכב אלפה**

החללית אנטרייז יוצאת מכוכב אלפה חזרה לכדה"א.  
בדרך היא עוברת ליד הירח של כוכב אלפה ורואה  
פולס אלקטרו מגנטי חזק יוצא לכיוון הכוכב.  
ידוע שבירח ישנה קבוצת חייזרים תוקפניים בשם  
ה"קליגוניים". 1.3 שניות מאוחר יותר היא רואה  
פיצוץ בכוכב. המרחק בין הכוכב לירח שלו  
הוא 500 מיליון מטרים כפי שנמדד במערכת החללית.  
מהירות החללית ביחס לכוכב ולירח היא  $0.9c$ .



- א. מהו מרווח הזמן בין גילוי הגל לפיצוץ במערכת הכוכב והירח?
- ב. מה משמעות הסימן בהפרש הזמן?
- ג. האם הפולס גרם לפיצוץ או להיפך?

**תשובות סופיות:**

1) א.  $v = 5.65 \cdot 10^7 \frac{m}{sec}$  ב.  $x'_2 = -10.32 \cdot 10^5 m$

2) ראה סרטון.

3)  $\Delta t = \gamma_0 (1 + \beta) \left( \tau - \frac{l_0}{c} \right)$

4) א.  $t_3 = -3.525 sec$  ב. הפיצוץ היה לפני הגעת הגל לכוכב וגם לפני ירי הגל.

ג. לא יכול להיות שהפיצוץ גרם לירי של הפולס,  $x_2 = 11.47 \cdot 10^8 \cdot m > 10.575 \cdot 10^8 m$

## טרנספורמציית לורנץ למהירות:

רקע:

$$v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}$$

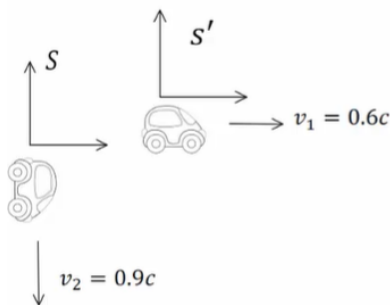
אברציה - שינוי זווית המהירות:

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma_0 \left(\cos \theta - \frac{v_0}{c}\right)}$$

שאלות:

### (1) מהירות יחסית בין מכוניות

שתי מכוניות נוסעות האחת במאונך לשנייה כך שמהירות המכונית הראשונה היא  $0.6c$  ומהירות המכונית השנייה היא  $0.9c$ . מצא את המהירות היחסית.



תשובות סופיות:

$$v'_{2x} = -0.6c, v'_{2y} = -0.72c \quad (1)$$

## תרגילים לטרנספרמציית מיקום ומהירות:

### שאלות:

#### 1) דודה יוצאת לטיול



המבחן בפיזיקה התחיל בשעה 9:00 והמשגיחה יצאה לטייל במהירות  $0.8c$  (דודה זריזה במיוחד). לאחר שעה לפי שעונה היא שולחת לסטודנטים אות רדיו לסיים את הבחינה. כמה זמן ארכה הבחינה עבור הסטודנטים?

#### 2) כדור מתגלגל בחללית



חללית בעלת אורך עצמי של 200 מטר נעה במהירות  $0.9c$  ביחס למערכת אינרציאלית  $S$ . כדור קטן מתגלגל לאורכה במהירות  $u' = 0.04c$  בכיוון ציר  $x$ , כפי שנמדד ע"י צופה בחללית.

א. מהי מהירות הכדור כפי שנמדדת ע"י צופה ב- $S$ ? (הבא את התשובה ביחידות של  $c$ ).

ב. מהו הזמן שייקח לכדור לעבור מקצה לקצה של החללית כפי שנמדד ב- $s$ ? (הבא את התשובה במיליוניות שנייה).

ג. איזה מרחק עבר הכדור לפי צופה במערכת  $s$ ? (ביחידות של ק"מ).

#### 3) חלקיקים נוצרים בגובה ומתפרקים



שני חלקיקים נוצרים בגובה  $h$  מעל הקרקע. אחד נפלט בזווית 225 מעלות עם ציר ה- $x$  והשני בזווית  $-45$  מעלות עם ציר ה- $x$ .

החלקיק הראשון מתפרק לאחר זמן  $T$  בגובה  $\frac{3h}{4}$

והחלקיק השני מתפרק לאחר זמן  $T_2$  בגובה  $\frac{h}{4}$ .

התעלם מהכבידה בבעיה.

א. הבע את מהירויות החלקיקים באמצעות  $h$  ו- $T$ .

ב. מצא את זמן החיים העצמי של כל חלקיק (זמן החיים במערכת המנוחה).

ג. מצא מערכת  $s'$  הנעה בכיוון החיובי של ציר ה- $x$  בה ההתפרקות מתרחשות באותו הזמן.

ד. מה המרחק בין ההתפרקות במערכת  $s'$ ?

**(4) מיואון מתפרק ליד אלקטרון**

- מיואון ( $\mu$ ) נוצר ברגע מסוים ונע במהירות  $0.7c$  ביחס לקרקע. המיואון מתפרק לאחר שנע  $3$  ק"מ ממקום היווצרו.
- כמה זמן חי המיואון במערכת העצמית שלו? אלקטרון נע במקביל למיואון ובמהירות  $0.5c$  ביחס למעבדה.
  - מהי מהירות המיואון ביחס לאלקטרון?
  - איזה מרחק נע המיואון ביחס לאלקטרון.

**(5) זווית של מוט נע**



מוט בעל אורך  $l$  (לא נתון) נע במהירות  $v_1$  בכיוון ציר ה- $y$  ביחס לצופה הנמצא במעבדה. הצופה במעבדה מודד זווית  $\alpha_1$  של המוט ביחס לציר ה- $x$ .

איזו זווית ימדוד צופה הנע במהירות  $v_2 \hat{x}$  ביחס למעבדה?

**(6) תדר יחסי**



במערכת  $s'$  הנעה במהירות  $v$  ביחס למערכת המעבדה  $S$ , נמצא משדר רדיו הפולט אותות בתדירות  $f_0$ ?

- מה תהיה התדירות שתיקלט במעבדה?
- מה תהיה התדירות שתיקלט במערכת  $s''$  הנעה במהירות  $\vec{v} = -v\hat{x}$  ביחס למעבדה?

## תשובות סופיות:

$$\Delta t = 1.08 \cdot 10^4 \text{ sec} \quad (1)$$

$$x_1 = 10.78 \text{ km} \quad \lambda \quad t_1 = 39.62 \mu\text{s} \quad \text{ב.} \quad v_x = 0.907c \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\tau_1 = T \sqrt{1 - \frac{h^2}{8T^2c^2}}, \quad \tau_2 = 2T \sqrt{1 - \frac{9h^2}{64T^2c^2}} \quad \text{ב.} \quad v_1 = \frac{h}{2\sqrt{2}T}, \quad v_2 = \frac{3h}{4\sqrt{2}T} \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$d'^2 = \frac{5h^4 - 3c^2T^2h^2 + c^4T^4}{h^2 - c^2T^2} \quad \text{ד.} \quad v_0 = \frac{c^2T}{h} \quad \text{ג.}$$

$$\Delta x_{12} = 0.98 \text{ km} \quad \lambda \quad V_{12} = 0.31c \quad \text{ב.} \quad \tau = 10^{-5} \text{ sec} \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$\tan \alpha' = \gamma_2 \left( \tan \alpha_1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \right) \quad (5)$$

$$f'' = \sqrt{\left( \frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2} f_0 \quad \text{ב.} \quad f_s = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} f_0 \quad \text{א.} \quad (6)$$