

קורס הכנה במתמטיקה לתלמידי רפואה ורפואת שיניים

פרק 23 - טריגונומטריה במרחב - הפירמידה

תוכן העניינים

1. פירמידה שבסיסה ריבוע 1
2. פירמידה שבסיסה מלבן 5
3. פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות 12
4. פירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים 14
5. פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית 15

פירמידה שבסיסה ריבוע:

סיכום כללי:

הגדרה:

גוף מרחבי הבנוי ממצולע כלשהו, המהווה את בסיס הפירמידה, ומקצועות היוצאים מכל קדקודי המצולע ונפגשים בנקודה אחת הנקראת קדקוד הפירמידה. בפירמידה ישרה כל המקצועות שווים.

הגדרה:

גובה הפירמידה הוא קטע היוצא מקדקוד הראש של הפירמידה ומאונך למישור הבסיס.

משפט:

בפירמידה ישרה, גובה הפירמידה תמיד נופל בנקודת מרכז המעגל החוסם את מצולע הבסיס.

באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.



שאלות:



- (1) נתונה פירמידה מרובעת משוכללת (הבסיס הוא ריבוע) SABCD. אורך מקצוע הבסיס הוא 25 ס"מ. הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס היא זווית בת 35° .
 א. חשב את אלכסון הבסיס.
 ב. חשב את גובה הפירמידה.
 ג. סמן נקודה E כאמצע BC וחשב את הזווית שבין SE לבסיס הפירמידה.



- (2) נתונה פירמידה מרובעת משוכללת SABCD. אורך מקצוע הבסיס הוא 12 ס"מ. אורך מקצוע צדדי הוא 20 ס"מ.
 א. חשב אורך גובה של פאה צדדית.
 ב. חשב את שטח הפנים של הפירמידה.
 ג. חשב זווית בין מקצוע צדדי לבסיס.



(5) נתונה פירמידה מרובעת משוכללת וישרה. אורכו של מקצוע הבסיס הוא 10 ס"מ ואורכו של המקצוע הצדדי הוא 16 ס"מ. חשב את:

- א. הזווית שבין המקצוע הצדדי והבסיס.
- ב. גובה הפירמידה.
- ג. הזווית שבין הפאה הצדדית והבסיס.
- ד. נפח הפירמידה.
- ה. שטח הפנים של הפירמידה.

(6) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה. אורך מקצוע הבסיס הוא b והזווית שבין המקצוע הצדדי לבסיס היא α . הבע באמצעות b ו- α את נפח הפירמידה ואת שטח המעטפת שלה.

(7) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה. אורכו של מקצוע הבסיס הוא a והזווית שבין שתי פאות צדדיות סמוכות היא β . זווית הבסיס של פאה צדדית היא γ . הבע באמצעות β את $\sin \gamma$.

(8) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה. הזווית שבין שני מקצועות צדדיים סמוכים היא 2α והזווית שבין שני מקצועות צדדיים נגדיים היא 2β . הוכח: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(9) נתונה

תשובות סופיות:

- (1) א. 35.36 ס"מ ב. 12.378 ס"מ h ג. 44.72°
- (2) א. 19.079 ס"מ ב. 601.89 ס"מ P ג. 64.896°
- (3) א. $a\sqrt{8.5}$ ב. 6.9° ג. $a = 2$
- (4) א. $V_{S'ABCD'} = \frac{4}{3}a^3 > V_{SABCD} = \frac{2}{3}a^3$ ב. פי $4\sqrt{\frac{19}{82}}$ ג. דנה טועה - $P_{S'ABCD'} = 9a^2 \neq P_{SABCD} \approx 7a^2$
- (5) א. 63.77° ב. $\sqrt{206}$ ס"מ ג. 70.79° ד. 478.42 סמ"ק
ה. 403.97 סמ"ר.
- (6) $V = \frac{b^3 \tan \alpha}{3\sqrt{2}}, M = 2b^2 \sqrt{\frac{1}{2} \tan^2 \alpha + \frac{1}{4}}$
- (7) $\sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \beta}}$
- (8) הוכחה.
- (9) הוכחה.
- (10) 30°

פירמידה שבסיסה מלבן:

סיכום כללי:

באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.



תיאור פירמידה שבסיסה מלבן. ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת האלכסונים שכן היא נקודת מרכז המעגל החוסם את המלבן.

שאלות:



- 11** נתונה פירמידה מרובעת וישרה SABCD שבסיסה מלבן. אורכי צלעות הבסיס הם: $AB = 12$ ס"מ, $BC = 5$ ס"מ. אורך גובה הפירמידה הוא: <



13 נתונה פירמידה ישרה ומרובעת

שבסיסה ABCD הוא מלבן.

נתון: אורך אלכסון הבסיס AC הוא 10 ס"מ.

גובה הפירמידה SO הוא 12 ס"מ.

א. חשב את אורך המקצוע הצדדי.

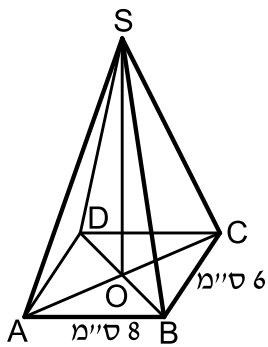
ב. חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

ג. נתון כי זווית הראש של הפאה הצדדית SBC היא 40° .

חשב את אורך מקצוע הבסיס BC.

חשב את אורך המקצוע AB ואת נפח הפירמידה.

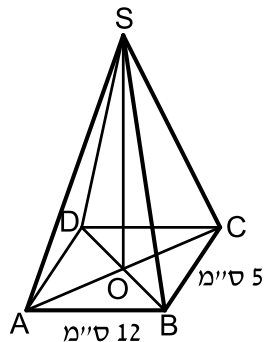
14 נתונה פירמידה SABCD, מרובעת וישרה שבסיסה מלבן.



- 17 נתונה פירמידה ישרה SABCD. הבסיס ABCD הוא מלבן שבו: $AB = 8$ ס"מ, $BC = 6$ ס"מ. אורך מקצוע צדדי הוא 17 ס"מ.
- חשב את הזווית $\angle CSA$.
 - חשב את הזווית $\angle CSB$.
 - חשב את נפח הפירמידה.



- 18 נתונה פירמידה SABCD מרובעת וישרה שבסיסה מלבן. גובה הפירמידה שווה ל-24 ס"מ. הגובה SE בפאה הצדדית SBC שווה ל-26 ס"מ. חשב את:
- אורך המקצוע AB.
 - הזווית בין הקטע SE לבסיס ABCD.
 - נפח הפירמידה הוא 2400 סמ"ק.
 - חשב את אורך המקצוע BC.



(21) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).



נתון: $AD = 15$ ס"מ, $AB = 20$ ס"מ.

הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא $SE = 22$ ס"מ.

- חשב את גובה הפירמידה.
- חשב את נפח הפירמידה.
- חשב את הזווית שבין הישר SE לבין בסיס הפירמידה.

(22) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).



נתון: $AD = 16$ ס"מ, $AB = 17$ ס"מ.

הגובה של הפ

(25) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור). גובה הפירמידה הוא 17 ס"מ.

הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא 22 ס"מ $SE =$.

א. חשב את הזווית שבין הישר SE לבין בסיס הפירמידה.

ב. חשב את מקצוע הבסיס, BC.

ג. חשב את מקצוע הבסיס, AB.

אם נפח הפירמידה הוא 1000 סמ"ק.



(26) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור). נתון: $AD = 15$ ס"מ, $AB = 20$ ס"מ.

זווית הראש של הפאה הצדדית SAB היא 38° .

א. חשב את הגובה של הפ



(29) נתונות שתי פירמידות ישרות שבסיסן מלבן :

האחת- $SABCD$ והשנייה- $S'A'B'C'D'$.

הקטעים SH ו- $S'H'$ הם בהתאמה הגבהים של שתי הפירמידות.

ידוע כי : $AB = 2k$, $BC = k$, $HS = 3k$

וכי : $A'B' = 3k$, $B'C' = k$, $H'S' = 2k$

א. לפניך מספר טענות - קבע אלו נכונות ואלו שגויות.
נמק.



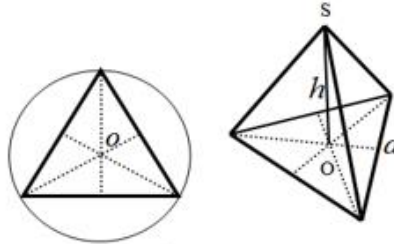
תשובות סופיות:

- (11) א. 300 סמ"ק $V =$ ב. 13 ס"מ ג. 66.57°
- (12) א. 16.115 ס"מ ב. 15.207 ס"מ ג. 263.26 סמ"ר $M =$ ד. 68.2°
- (13) א. 13 ס"מ ב. 67.38° ג. 8.89 ס"מ $BC =$ ד. 4.579 ס"מ $AB =$, 162.32 סמ"ק $V =$
- (14) א. 51.34° ב. 9 ס"מ $BC =$ ג. 65.77°
- (15) א. 11.284 ס"מ $SE =$ ב. 12.78 ס"מ $SA =$ ג. 10.551 ס"מ $h =$ ד. 337.632 סמ"ק $V =$ ה. 69.24° ו. 55.65°
- (16) א. 17.435 ס"מ $AD =$ ב. 19.5 ס"מ $SF =$ ג. 640 סמ"ר $M =$
- (17) א. 34.21° ב. 20.328° ג. 260 סמ"ק $V =$
- (18) א. 20 ס"מ $AB =$ ב. 67.38° ג. 15 ס"מ $BC =$
- (19) א. 6.796 ס"מ ב. 16.282 סמ"ר $S_{\Delta SBC} =$ ג. 2.533 ס"מ $h =$
- (20) א. 30.23 ס"מ ב. 19.3 ס"מ ג.

פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות:

סיכום כללי:

באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.



תיאור פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות.
 ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת
 התיכונים (נקודת מרכז המעגל החוסם את המשולש).

שאלות:



- 31** נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה צלעות. מעבירים את הגובה SD בפאה הצדדית ASB וכן את הגובה CD בבסיס ABC. זווית הבסי

תשובות סופיות:

- | | | | |
|-------------------------|----------------------|---------------------|-------------------|
| 31) א. 10 ס"מ. | ב. 5.21 ס"מ. | ג. 61° . | ד. 42° . |
| 32) א. 60.339° . | ב. $\sqrt{148}$ ס"מ. | ג. 74.106° . | ד. 67.2° . |
| 33) הוכחה. | | | |

פירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים:

שאלות:



- (34) נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$). מעבירים גבהים למקצוע SC במישורי הפאות SAC ו-SBC כך שהזווית הנוצרת בין מישורים אלו היא $\angle ADB = 42^\circ$. ידוע כי אורך המקצוע AB הוא 8 ס"מ. הגובה AD בפאה SAC מחלק את המקצוע SC ביחס: $\frac{DC}{SD} = \frac{2}{3}$.

- חשב את אורך הגובה AD.
- חשב את זווית הראש בפאה SAC.
- חשב את שטח משולש הבסיס ABC.

- (35) נתונה פירמידה משוכללת וישרה SABC. הבסיס הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$), אורך שוקו k וזווית הראש שלו היא 2γ . אורך כל מקצוע צדדי בפירמידה גם הוא k . הבע באמצעות k ו-<

פירמידה שבסיסה הוא משולש ישר זווית:

סיכום כללי:

באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.



תיאור פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית.
ניתן לראות כי משולש הבסיס מתקבל ממלבן ע"י העברת אלכסון, לכן נקודת המרכז היא מפגש האלכסונים (בדומה לבסיס מלבני).

שאלות:



(36) נתונה פירמידה ישרה $SABC$ שבסיסה הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$).

בפיר