

# סמינר דידקטי במתמטיקה

פרק 15 - טריגונומטריה במרחב - גליל חרוט וכדור

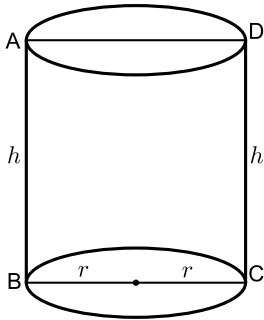
תוכן העניינים

- 1. הגליל..... 1
- 2. החרוט..... 3
- 3. הכדור..... 6

## הגליל:

### סיכום כללי:

#### הגדרות:

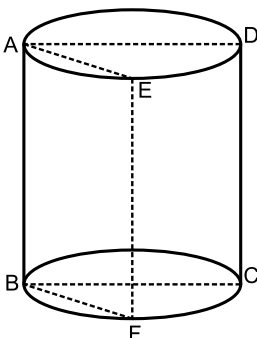


- נתון מעגל במישור  $\alpha$ . אם דרך כל הנקודות שעל המעגל נעלה אנכים למישור  $\alpha$  ונחתוך אותם ע"י מישור נוסף  $\beta$  המקביל ל- $\alpha$  נקבל גוף הנקרא גליל.
- לכל גליל יש שני בסיסים השווים זה לזה.
- המרחק בין שני בסיסי הגליל נקרא **גובה הגליל**.
- הישר AB נקרא **הקו היוצר** של הגליל (והוא גובה הגליל).
- כאשר חותכים את הגליל ע"י מישור שמאונך לבסיסי הגליל ועובר דרך המרכזים של שני הבסיסים, מתקבל מלבן הנקרא **החתך הצירי של הגליל**.
- אם נפרוש את מעטפת הגליל נקבל מלבן שאורכו  $2\pi r$  וגובהו  $h$ .

#### נוסחאות:

- נפח גליל:  $V = \pi r^2 h$ .
- שטח מעטפת של גליל:  $M = 2\pi r h$ .
- שטח פנים של גליל:  $P = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ .

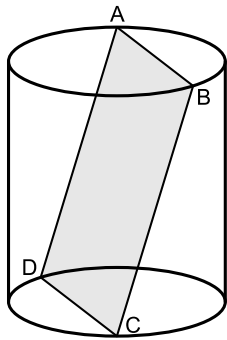
#### שאלות:



- (1) בגליל ישר חתכו מישור AEFB, היוצר עם מישור החתך הצירי ABCD של הגליל זווית  $\alpha$ . האלכסון  $AF = \ell$  של המרובע AEFB יוצר עם מישור בסיס הגליל זווית  $\beta$ . הבע את נפח הגליל באמצעות  $\alpha, \beta$  ו- $\ell$ .

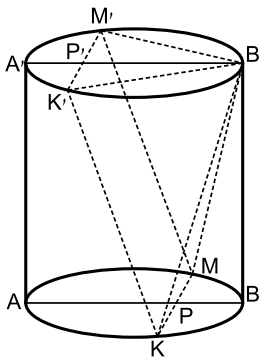
(2) האלכסון העובר במעטפת של גליל ישר כאשר היא פרושה יוצר זווית  $\alpha$  עם גובה הגליל. אורך האלכסון בחתך הצירי של הגליל הוא  $d$ .

הבע באמצעות  $d$  ו- $\alpha$  את שטח המעטפת של הגליל והוכח שהוא שווה:  $\frac{\pi^2 d^2 \tan \alpha}{\pi^2 + \tan^2 \alpha}$ .



(3) ABCD הוא חתך מלבני מישורי, בתוך גליל ישר, שהזווית בינו לבין מישור בסיס הגליל היא  $\alpha$ . הזווית בין האלכסון AC של המלבן ABCD למישור בסיס הגליל היא  $\beta$ . הצלע BC שווה ל- $a$ .

הוכח שנפח הגליל הוא:  $\frac{\pi a^3 \sin^3 \alpha}{4 \tan^2 \beta}$ .



(4) נתון גליל ישר שגובהו 16 ס"מ ורדיוס בסיסיו הוא 12 ס"מ. מעבירים את הקטרים AB ואת A'B' אשר מקבילים זה לזה בשני הבסיסים בהתאמה.

הנקודות P ו-P' נמצאות על הקטרים כך ש:  $A'P' = \frac{1}{4} A'B'$

ו-  $BP = \frac{1}{4} AB$ . דרך הנקודה P מעבירים KM מאונך ל-AB

ודרך הנקודה P' מעבירים את K'M' המאונך ל-A'B'. מצא את נפח הפירמידה המרובעת שבסיסה הוא KMM'K' וקדקודה בנקודה B'.

**תשובות סופיות:**

(1)  $V = \frac{\pi \ell^3 \cos^2 \beta \sin \beta}{4 \cos^2 \alpha}$

(2) שאלת הוכחה.

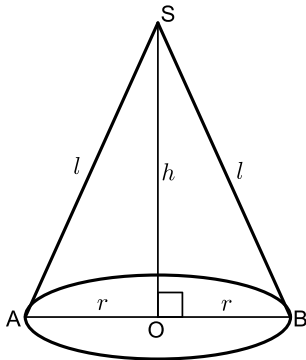
(3) שאלת הוכחה.

(4) צריך לחשב.

## החרוט:

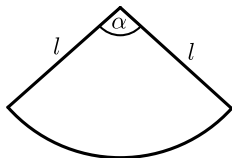
### סיכום כללי:

#### הגדרות:



- כאשר מחברים את נקודה S הנמצאת מחוץ למישור שבו נמצא מעגל ברדיוס  $r$ , עם כל הנקודות שעל מעגל זה, יתקבל חרוט.
- הנקודה S נקראת קדקוד החרוט.
- אם העקב של הגובה היורד מ-S נמצא במרכז המעגל, החרוט הוא **חרוט ישר**.
- לישר AS קוראים **הקו היוצר** (והוא מסומן ב- $l$ ).

- אם נחתוך חרוט ישר במישור העובר דרך הגובה, נקבל משולש שווה שוקיים שבסיסו הוא קוטר המעגל. למשולש זה קוראים בשם **החתך הציורי של החרוט**.
- אם נחתוך חרוט לאורך הקו היוצר שלו ונפרוש את מעטפת החרוט, נקבל גזרת



$$\text{עיגול עם זווית מרכזית } \alpha \text{ המקיימת: } \frac{\alpha}{360} = \frac{r}{l}$$

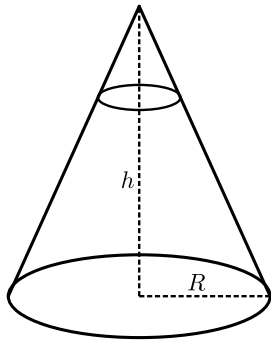
#### נוסחאות:

$$- \text{ נפח חרוט: } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

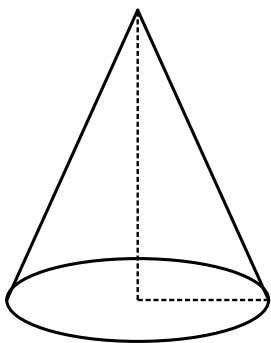
$$- \text{ שטח מעטפת של חרוט: } M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$- \text{ שטח פנים של חרוט: } P = \pi r^2 + \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

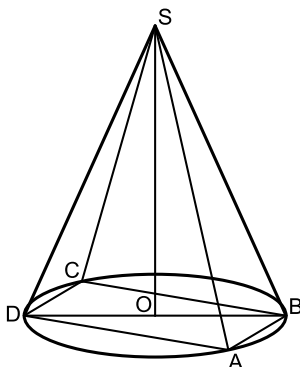
**שאלות:**



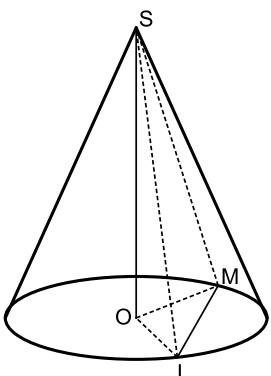
- (1) נתון חרוט ישר, שרדיוס בסיסו  $R$ , וגובהו  $h$ .  
מישור מקביל לבסיס חותך את החרוט.  
החתך הוא מעגל, ששטחו שווה לרבע משטחו של  
בסיס החרוט.  
מצא את היחס בין נפח החרוט, שנוצר ע"י החיתוך,  
לבין נפח החרוט המקורי.



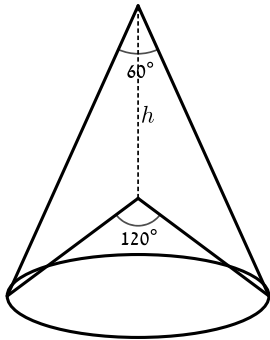
- (2) שטח פני חרוט ישר שווה ל- $245\pi$  סמ"ר.  
אם נפרוש את המעטפת הנ"ל במישור,  
נקבל גזרת עיגול בת זווית מרכזית השווה ל- $60^\circ$ .  
מצא את נפח החרוט הנ"ל.



- (3) בבסיס חרוט ישר חסום ריבוע  $ABCD$  שצלעו  $a$ .  
מחברים את הקדקודים  $A$  ו- $B$  של הריבוע עם  
ראש החרוט  $S$ , ומתקבל משולש שווה שוקיים  $SAB$   
עם זווית הראש  $\angle ASB = \alpha$ .  
הבע את נפח החרוט באמצעות  $a$  ו- $\alpha$ .



- (4) נתון חרוט ישר שקדקודו  $S$  ומרכז בסיסו הוא  $O$ .  
מעבירים מיתר  $LM$  כך ש- $\angle LOM = \alpha$ .  
הזווית שבין המישור  $LSM$  לבין בסיס החרוט היא  $\beta$ .  
מרחק המישור  $LSM$  ממרכז הבסיס הוא  $d$ .  
הבע את נפח החרוט באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $d$ .



- (5) נתונים שני חרוטים ישרים בעלי בסיס משותף. בחרוט אחד זווית הראש של החתך הצירי היא  $60^\circ$  ובחרוט השני זווית הראש של החתך הצירי היא  $120^\circ$ . הקדקודים של שני החרוטים נמצאים במרחק  $h$  זה מזה. הוכח כי ההפרש בין הנפחים של שני החרוטים הוא  $\frac{\pi h^3}{4}$ .

### תשובות סופיות:

$$\frac{1}{8} \quad (1)$$

$$\frac{1225\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{\pi a^3 \sqrt{\cos \alpha}}{12 \sin \frac{\alpha}{2}} \quad (3)$$

$$\frac{\pi d^3}{3 \sin^2 \beta \cos \beta \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (4)$$

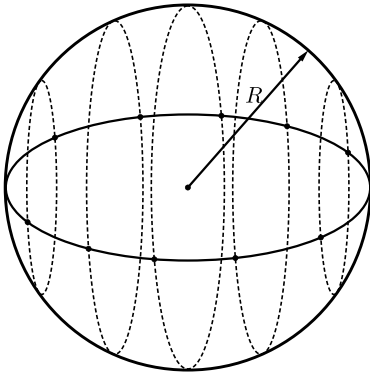
(5) הוכחה.

## הכדור:

### סיכום כללי:

#### הגדרות:

כדור הוא גוף הנוצר מסיבובו של חצי מעגל סביב קוטרו. קוטר זה הוא קוטר הכדור ושווה לפעמיים רדיוס הכדור. כל הנקודות שעל הכדור נמצאות במרחקים שווים ממרכז הכדור (רדיוס הכדור).



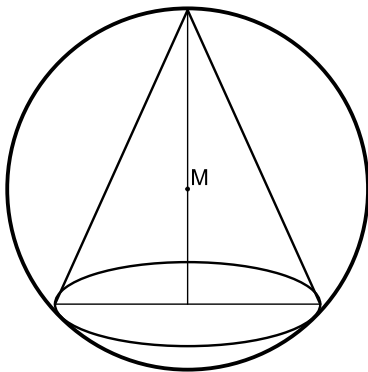
#### נוסחאות:

- נפח כדור:  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ .

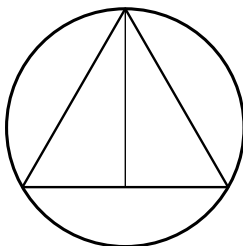
- שטח פני הכדור:  $P = 4\pi R^2$ .

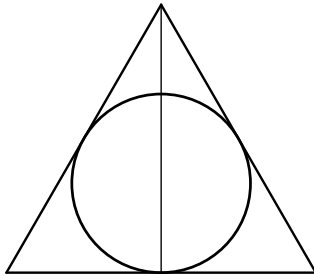
### שאלות:

- (1) חרוט ישר חסום בכדור, באופן שמרכז הכדור M נמצא על גובה החרוט. קוטר בסיס החרוט שווה לרדיוס הכדור. מצא את גודל הזווית בין הקו היוצר של החרוט לבין בסיסו.



- (2) בכדור בעל רדיוס R חסום חרוט ישר, שבו זווית הראש של החתך הצירי שווה ל- $2\alpha$ . הבע את שטח מעטפת החרוט הנ"ל באמצעות R ו- $\alpha$ .





- (3) בחרוט ישר שבו זווית הראש של החתך הצירי היא  $\alpha$ , והקו היוצר הוא  $l$ , חסום כדור. הבע את נפח הכדור באמצעות  $\alpha$  ו- $l$ .

- (4) חרוט שגובהו גדול פי 4 מרדיוסו בסיסו חסום בתוך כדור. שטח הפנים של הכדור הוא  $P$ . הבע את נפח החרוט באמצעות  $P$ .

- (5) בפירמידה ישרה שבסיסה ריבועי חסום כדור שרדיוסו  $R$ . כל אחת מהפאות הצדדיות יוצרת עם בסיס הפירמידה זווית  $\beta$ . הבע את נפח הפירמידה באמצעות  $R$  ו- $\beta$ .

### תשובות סופיות:

- (1)  $75^\circ$
- (2)  $2\pi R^2 \sin 2\alpha \cos \alpha$
- (3)  $\frac{4}{3} \pi l^3 \sin^3 \frac{\alpha}{2} \tan^3 \left( 45 - \frac{\alpha}{4} \right)$
- (4)  $\frac{256P\sqrt{P}}{14739\sqrt{\pi}}$
- (5)  $\frac{4R^3}{3} \tan \beta \cot^3 \frac{\beta}{2}$