מתמטיקה להנדסה אזרחית

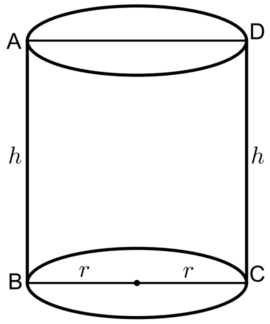
פרק 9 - טריגונומטריה במרחב - גליל חרוט וכדור

תוכן העניינים

הגליל:

סיכום כללי:

הגדרות:

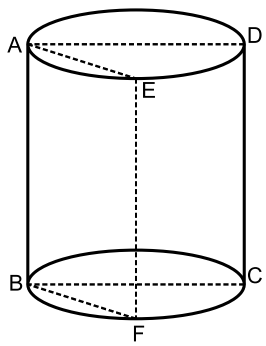


- נתון מעגל במישור α. אם דרך כל הנקודות שעל המעגל נעלה אנכים למישור α ונחתוך אותם ע"י מישור נוסף β המקביל ל- α נקבל גוף הנקרא גליל.
- לכל גליל יש שני בסיסים השווים זה לזה.
- המרחק בין שני בסיסי הגליל נקרא **גובה הגליל**.
- הישר AB נקרא **הקו היוצר** של הגליל (והוא גובה הגליל).
- כאשר חותכים את הגליל ע"י מישור שמאונך לבסיסי הגליל ועובר דרך המרכזים של שני הבסיסים, מתקבל מלבן הנקרא **החתך הצירי של הגליל**.
- אם נפרוש את מעטפת הגליל נקבל מלבן שאורכו $2\pi r$ וגובהו h.

נוסחאות:

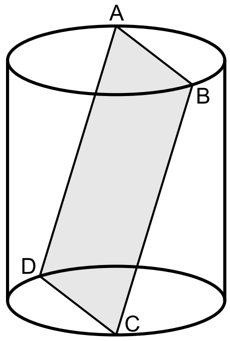
- נפח גליל: $V = \pi r^2 h$.
- שטח מעטפת של גליל: $M = 2\pi rh$.
- שטח פנים של גליל: $P = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

שאלות:

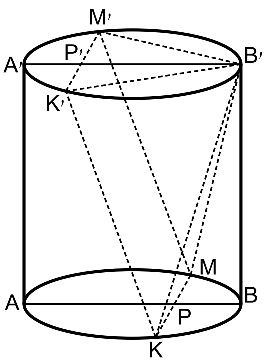


1) בגליל ישר חתכו מישור AEFB, היוצר עם מישור החתך הצירי ABCD של הגליל זווית α. האלכסון $AF = \ell$ של המרובע AEFB יוצר עם מישור בסיס הגליל זווית β.
הבע את נפח הגליל באמצעות α, β ו- ℓ.

2) האלכסון העובר במעטפת של גליל ישר כאשר היא פרושה יוצר זווית α עם גובה הגליל. אורך האלכסון בחתך הצירי של הגליל הוא d.
הבע באמצעות d ו- α את שטח המעטפת של הגליל והוכח שהוא שווה: $\frac{\pi^2 d^2 \tan\alpha}{\pi^2 + \tan^2\alpha}$.



3) ABCD הוא חתך מלבני מישורי, בתוך גליל ישר, שהזווית בינו לבין מישור בסיס הגליל היא α.
הזווית בין האלכסון AC של המלבן ABCD למישור בסיס הגליל היא β.
הצלע BC שווה ל- a.
הוכח שנפח הגליל הוא: $\frac{\pi a^3 \sin^3\alpha}{4\tan^2\beta}$.



4) נתון גליל ישר שגובהו 16 ס"מ ורדיוס בסיסיו הוא 12 ס"מ.
מעבירים את הקטרים AB ואת A'B' אשר מקבילים זה לזה בשני הבסיסים בהתאמה.
הנקודות P ו-P' נמצאות על הקטרים כך ש: $A'P' = \frac{1}{4}A'B'$ ו- $BP = \frac{1}{4}AB$. דרך הנקודה P מעבירים KM מאונך ל-AB ודרך הנקודה P' מעבירים את K'M' המאונך ל-A'B'.
מצא את נפח הפירמידה המרובעת שבסיסה הוא KMM'K' וקדקודה בנקודה B'.

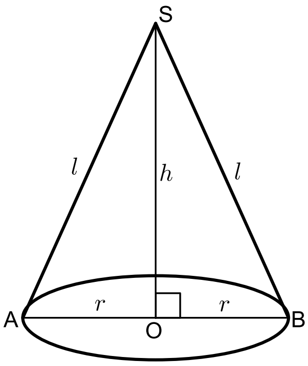
תשובות סופיות:

1) $V = \frac{\pi \ell^3 \cos^2\beta \sin\beta}{4\cos^2\alpha}$.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) צריך לחשב.

החרוט:

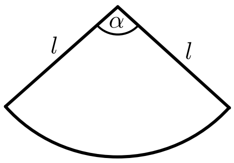
סיכום כללי:

הגדרות:



- כאשר מחברים את נקודה S הנמצאת מחוץ למישור שבו נמצא מעגל ברדיוס r, עם כל הנקודות שעל מעגל זה, יתקבל חרוט.
- הנקודה S נקראת קדקוד החרוט.
- אם העקב של הגובה היורד מ-S נמצא במרכז המעגל, החרוט הוא **חרוט ישר**.
- לישר AS קוראים **הקו היוצר** (והוא מסומן ב- l).

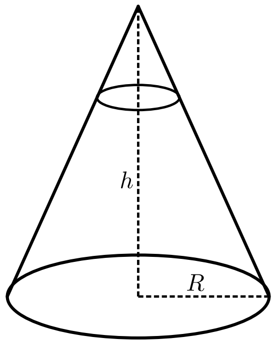
- אם נחתוך חרוט ישר במישור העובר דרך הגובה, נקבל משולש שווה שוקיים שבסיסו הוא קוטר המעגל. למשולש זה קוראים בשם **החתך הצירי של החרוט**.
- אם נחתוך חרוט לאורך הקו היוצר שלו ונפרוש את מעטפת החרוט, נקבל גזרת עיגול עם זווית מרכזית α המקיימת: $\frac{r}{l}=\frac{\alpha}{360}$.



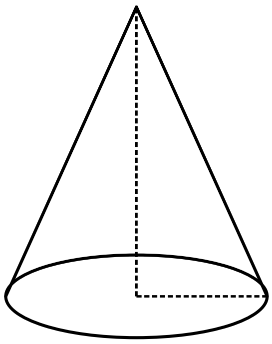
נוסחאות:

- נפח חרוט: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.
- שטח מעטפת של חרוט: $M=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$.
- שטח פנים של חרוט: $P=\pi r^2+\pi r\sqrt{r^2+h^2}$.

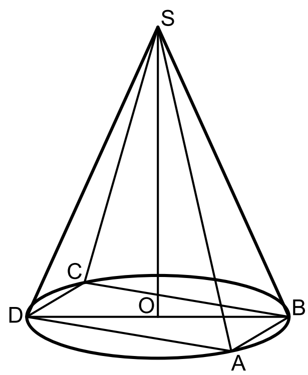
שאלות:



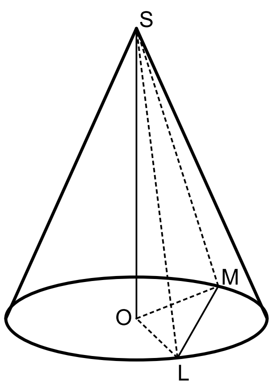
1) נתון חרוט ישר, שרדיוס בסיסו R, וגובהו h.
מישור מקביל לבסיס חותך את החרוט.
החתך הוא מעגל, ששטחו שווה לרבע משטחו של בסיס החרוט.
מצא את היחס בין נפח החרוט, שנוצר ע"י החיתוך, לבין נפח החרוט המקורי.



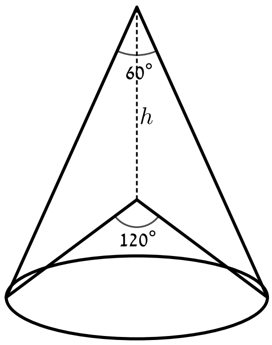
2) שטח פני חרוט ישר שווה ל- 245π סמ"ר.
אם נפרוש את המעטפת הנ"ל במישור,
נקבל גזרת עיגול בת זווית מרכזית השווה ל- $60°$.
מצא את נפח החרוט הנ"ל.



3) בבסיס חרוט ישר חסום ריבוע ABCD שצלעו a.
מחברים את הקדקודים A ו-B של הריבוע עם ראש החרוט S, ומתקבל משולש שווה שוקיים SAB עם זווית הראש $\sphericalangle ASB = \alpha$.
הבע את נפח החרוט באמצעות a ו- α.



4) נתון חרוט ישר שקדקודו S ומרכז בסיסו הוא O.
מעבירים מיתר LM כך ש- $\sphericalangle LOM = \alpha$.
הזווית שבין המישור LSM לבין בסיס החרוט היא β.
מרחק המישור LSM ממרכז הבסיס הוא d.
הבע את נפח החרוט באמצעות α, β ו- d.



5) נתונים שני חרוטים ישרים בעלי בסיס משותף.
בחרוט אחד זווית הראש של החתך הצירי היא בת $60°$
ובחרוט השני זווית הראש של החתך הצירי היא בת $120°$.
הקדקודים של שני החרוטים נמצאים במרחק h זה מזה.
הוכח כי ההפרש בין הנפחים של שני החרוטים הוא $\frac{\pi h^3}{4}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{1}{8}$.

2) $\frac{1225\pi}{3}$.

3) $\frac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$.

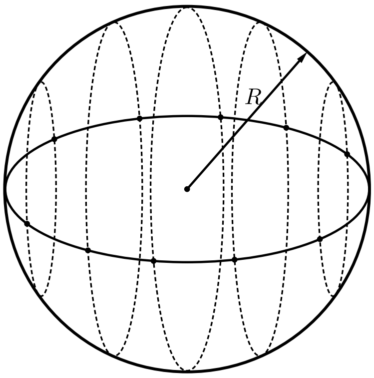
4) $\frac{\pi d^3}{3\sin^2\beta\cos\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

5) הוכחה.

הכדור:

סיכום כללי:

הגדרות:

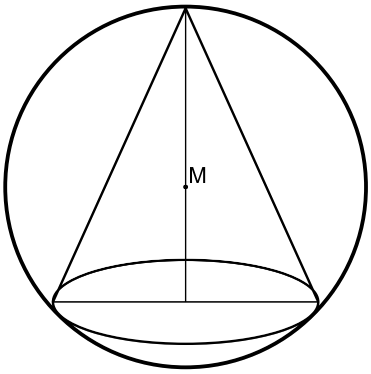


כדור הוא גוף הנוצר מסיבובו של חצי מעגל סביב קוטרו.
קוטר זה הוא קוטר הכדור ושווה לפעמיים רדיוס הכדור.
כל הנקודות שעל הכדור נמצאות במרחקים שווים ממרכז הכדור (רדיוס הכדור).

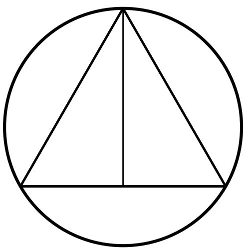
נוסחאות:

- נפח כדור: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.
- שטח פני הכדור: $P=4\pi R^2$.

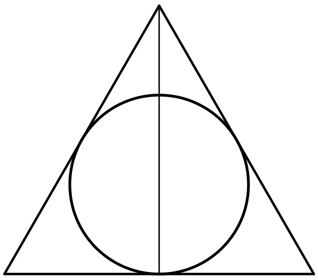
שאלות:



1) חרוט ישר חסום בכדור, באופן שמרכז הכדור M נמצא על גובה החרוט.
קוטר בסיס החרוט שווה לרדיוס הכדור.
מצא את גודל הזווית בין הקו היוצר של החרוט לבין בסיסו.



2) בכדור בעל רדיוס R חסום חרוט ישר, שבו זווית הראש של החתך הצירי שווה ל- 2α.
הבע את שטח מעטפת החרוט הנ"ל באמצעות R ו- α.



3) בחרוט ישר שבו זווית הראש של החתך הצירי היא α,
והקו היוצר הוא ℓ, חסום כדור.
הבע את נפח הכדור באמצעות α ו- ℓ.

4) חרוט שגובהו גדול פי 4 מרדיוס בסיסו חסום בתוך כדור.
שטח הפנים של הכדור הוא P. הבע את נפח החרוט באמצעות P.

5) בפירמידה ישרה שבסיסה ריבועי חסום כדור שרדיוסו R.
כל אחת מהפאות הצדדיות יוצרת עם בסיס הפירמידה זווית β.
הבע את נפח הפירמידה באמצעות R ו- β.

תשובות סופיות:

1) 75°.

2) $2\pi R^2 \sin 2\alpha \cos\alpha$.

3) $\frac{4}{3}\pi \ell^3 \sin^3\frac{\alpha}{2}\tan^3\left(45-\frac{\alpha}{4}\right)$.

4) $\frac{256P\sqrt{P}}{14739\sqrt{\pi}}$.

5) $\frac{4R^3}{3}\tan\beta\cot^3\frac{\beta}{2}$.