חשבון אינפיניטסימלי (1)

פרק 32 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

1. טור טיילור וטור מקלורן 1
2. נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות 3

טור טיילור וטור מקלורן

שאלות

בשאלות **1-24** מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן):

1) $f(x)=\sin 2x$ **2)** $f(x)=x^2e^{-4x}$ **3)** $f(x)=\sinh x$

4) $f(x)=\sin^2 x$ **5)** $f(x)=\cos^2 x$ **6)** $f(x)=2^x$

7) $f(x)=x\cos(4x^2)$ **8)** $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$ **9)** $f(x)=\arcsin x$

10) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ **11)** $f(x)=\dfrac{3}{1-x^4}$ **12)** $f(x)=\dfrac{1}{1+9x^2}$

13) $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$ **14)** $f(x)=\dfrac{x}{4x+1}$ **15)** $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}$

16) $f(x)=\dfrac{3}{x^2+x-2}$ **17)** $f(x)=\dfrac{7x-1}{3x^2+2x-1}$ **18)** $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

19) $f(x)=\ln(1+x)$ **20)** $f(x)=\ln(1-x)$ **21)** $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

22) $f(x)=\ln(5-x)$ **23)** $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$ **24)** $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x}{3}\right)$

הערות: לפתרון שאלות **15** ו-**16**, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים **18**, **19**, **23** ו-**24** יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות **25-27** מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס,
בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים):

25) $f(x)=e^{-x^2}\cos x$ **26)** $f(x)=\tan x$ **27)** $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{n+2}}{n!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

5) $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

7) $\left(-\infty<x<\infty\right)$ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}x^{4n+1}}{(2n)!}$

8) $\left(-1\le x<1\right)$ $\ln 2-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$

9) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\left(-1<x<1\right)$

10) $\left(|x|<1\right)$ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

11) $\left(|x|<1\right)$ $\sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$

12) $\left(|x|<\frac{1}{3}\right)$ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$

13) $\left(|x|<5\right)$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$

14) $\left(|x|<\frac{1}{4}\right)$ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$

15) $\left(|x|<3\right)$ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$

16) $\left(|x|<1\right)$ $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$

17) $\left(|x|<\frac{1}{3}\right)$ $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$

18) $\left(|x|<1\right)$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$

19) $\left(-1<x\le 1\right)$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$

20) $\left(-1\le x<1\right)$ $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$

21) $\left(|x|<1\right)$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$

22) $\left(-5\le x<5\right)$ $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$

23) $\left(|x|<\frac{1}{2}\right)$ $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$

24) $\left(|x|\le 3\right)$ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$

25) $1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4-\frac{331}{720}x^6+..$

26) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$

27) $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+..$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן	תחום התכנסות
$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$	$-1<x\le 1$
$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$	$-1\le x\le 1$
$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\ldots$	$-1<x<1$
$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n$ $=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$	$-1\le x\le 1\ (m>0)$ $-1<x\le 1\ (-1<m<0)$ $-1<x<1\ (m\le -1)$ $m\ne 0,1,2,3,\ldots$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©