שיטות כמותיות

פרק 23 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים 1
2. מבחני התכנסות לטורים 3
3. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי 5
4. תרגילי תיאוריה 6

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-6**. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(0.44)^n$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{7^{n+1}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{4^{n+2}}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-4)\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-5)^n}{7^n}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **7-11**. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n-1)}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

10) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))}$

11) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

טור הרמוני מוכלל

12) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5n}$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2/3}$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\sqrt[3]{n^4}}$

ו. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^e}$

תכונות אלגבריות של טורים

13) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4^n}{7^{n+1}}+n^{-1.5}\right)$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n^2}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

תשובות סופיות

1) מתכנס ל-$\frac{11}{14}$. **2)** מתכנס ל-$\frac{1}{3}$. **3)** מתבדר.

4) מתכנס ל-$-\frac{64}{7}$. **5)** מתכנס ל-$\frac{11}{12}$. **6)** מתכנס ל-8.

7) מתכנס ל-$\frac{1}{2}$. **8)** מתכנס ל-$\frac{1}{12}$. **9)** מתבדר.

10) $S=\frac{1}{\ln 2}$ **11)** $\frac{1}{12}$

12) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
ד. מתבדר. ה. מתכנס. ו. מתכנס.

13) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.

14) $\frac{\pi^2}{6}-\frac{5}{4}$

מבחני התכנסות לטורים

שאלות

מבחן ההתבדרות

1) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln n$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+2}$ ד. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$

מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **2-5** (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+5}}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\,(p>1)$ **5)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\,(p\le 1)$

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3}$.

ב. מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty}n^2e^{-n^3}$.

מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+10n+1}$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$ **9)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-2}{3^n+2n}$ **11)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ **12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$

מבחן המנה ומבחן השורש

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}$

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n!\cdot 3^n}$

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{1000}e^{-n}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(1+n^2)}{n!}$

21) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

תשובות סופיות

1) א-ו: מתבדר.

2) מתבדר. **3)** מתבדר. **4)** מתכנס.

5) מתבדר. **6)** א. מתכנס. ב. 0

7) מתכנס. **8)** מתבדר. **9)** מתבדר.

10) מתכנס. **11)** מתבדר. **12)** מתכנס.

13) מתבדר. **14)** מתכנס. **15)** מתכנס.

16) מתכנס. **17)** מתכנס. **18)** מתכנס.

19) מתכנס. **20)** מתכנס. **21)** מתכנס.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

שאלות

מבחן לייבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-3**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$ **2)** $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

בשאלות **4-10** קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n^2}$ **5)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ **6)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}$

7) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ **9)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+n\ln n}{n^2}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

תשובות סופיות

1) מתכנס. **2)** מתכנס. **3)** מתכנס.

4) מתבדר. **5)** מתכנס בהחלט. **6)** מתכנס בתנאי.

7) מתכנס בהחלט. **8)** מתכנס בתנאי. **9)** מתכנס בתנאי.

10) מתכנס בתנאי.

תרגילי תיאוריה

שאלות

1) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum\left(a_n+b_n\right)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum\left(a_n+b_n\right)$ מתבדר.

2) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum\frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

3) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+(-1)^n\right)$ מתבדר.

4) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

5) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו ש- $\sum\left|a_n\right|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

6) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכיחו כי $\sum\frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

7) $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי $\sum\frac{a_n+4^n}{a_n+10^n}$ מתכנס.

8) הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה $(a_n)_{n\geq 1}$ מקיימת $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ אז $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

9) נניח כי $a_n \geq 0$.

הוכיחו כי: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

10) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

11) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

12) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, אז $\sum b_n$ מתכנס בתנאי.

13) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ לכל n, אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ לכל n, אז הטור מתבדר.

14) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum\sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

15) נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכיחו כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכיחו כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התאוריה תוכלו למצוא באתר : GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©