

שיטות כמותיות

פרק 23 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים..... 1
2. מבחני התכנסות לטורים..... 3
3. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי..... 5
4. תרגילי תיאוריה..... 6

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-6. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \quad (4)$$

טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-11. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} \quad (10) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (11)$$

טור הרמוני מוכלל

(12) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad \text{ג.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad \text{ו.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad \text{ה.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad \text{ד.}$$

תכונות אלגבריות של טורים

13) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right)$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

תשובות סופיות

- | | | |
|-------------------------------------|-----------------------------|------------------------|
| 1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$ | 2) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$ | 3) מתבדר. |
| 4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$ | 5) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$ | 6) מתכנס ל-8. |
| 7) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$ | 8) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$ | 9) מתבדר. |
| 10) $S = \frac{1}{\ln 2}$ | 11) $\frac{1}{12}$ | |
| 12) א. מתכנס.
ד. מתבדר. | ב. מתבדר.
ה. מתכנס. | ג. מתבדר.
ו. מתכנס. |
| 13) א. מתכנס. | ב. מתבדר. | ג. מתבדר. |
| 14) $\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$ | | |

מבחני התכנסות לטורים

שאלות

מבחן ההתבדרות

(1) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \quad \text{א.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+2} \quad \text{ג.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n \quad \text{ד.}$$

מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 2-5 (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \quad (2)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (p \leq 1) \quad (5) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (p > 1) \quad (4)$$

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$.

ב. מצאו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$.

מבחן השוואה ומבחן השוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}} \quad (9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} \quad (12) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1}-n) \quad (11) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-2}{3^n+2n} \quad (10)$$

מבחן המנה ומבחן השורש

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (21)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (1+n^2)}{n!} \quad (20)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (19)$$

תשובות סופיות

- | | | | |
|-----------------|---------------|-------------|-------------|
| (1) א-ו: מתבדר. | (2) מתבדר. | (3) מתבדר. | (4) מתכנס. |
| (5) מתבדר. | (6) א. מתכנס. | (7) מתכנס. | (8) מתבדר. |
| (9) מתכנס. | (10) מתכנס. | (11) מתבדר. | (12) מתכנס. |
| (13) מתבדר. | (14) מתכנס. | (15) מתכנס. | (16) מתכנס. |
| (17) מתכנס. | (18) מתכנס. | (19) מתכנס. | (20) מתכנס. |
| (21) מתכנס. | | | |

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

שאלות

מבחן לייבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-3:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

בשאלות 4-10 קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (8) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (10)$$

תשובות סופיות

- (1) מתכנס. (2) מתכנס. (3) מתכנס.
 (4) מתבדר. (5) מתכנס בהחלט. (6) מתכנס בתנאי.
 (7) מתכנס בהחלט. (8) מתכנס בתנאי. (9) מתכנס בתנאי.
 (10) מתכנס בתנאי.

תרגילי תיאוריה

שאלות

- (1) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.
 א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.
 ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

- (2) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.
 א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
 ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.
 ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

(3) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$ מתבדר.

(4) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

- (5) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.
 הוכיחו כי $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ מתבדר.
 ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.
 הוכיחו ש- $\sum |a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

- (6) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכיחו כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

- (7) $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$ מתכנס.

(8) הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה $(a_n)_{n \geq 1}$ מקיימת $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

(9) נניח כי $a_n \geq 0$.

הוכיחו כי: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

(10) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

(11) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

(12) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בתנאי.

(13) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכל n , אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ לכל n , אז הטור מתבדר.

(14) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.הוכיחו כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

- 15** נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.
- א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.
1. הוכיחו כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.
 2. הוכיחו כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.
- ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.
- הוכיחו כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התאוריה תוכלו למצוא באתר: GooL.co.il