

# מתמטיקה למדעי החיים

פרק 37 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים..... 1
2. מבחן ההתבדרות של טורים..... 4
3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים..... 5
4. מבחני התכנסות לטורים כלליים..... 7
5. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי..... 9
6. תרגילי תיאוריה..... 10

## טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

### שאלות

#### טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-6. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \quad (4)$$

#### טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-11. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} \quad (10) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (11)$$

#### טור הרמוני מוכלל

(12) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad \text{ג.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ב.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad \text{ו.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad \text{ה.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad \text{ד.}$$

**תכונות אלגבריות של טורים**

13) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א.  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right)$     ב.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2}$     ג.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)^2}$ , אם ידוע כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

15) מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא  $0.123123123\dots + 0.141414\dots$ .

**תשובות סופיות**

- (1) מתכנס ל-  $\frac{11}{14}$ .  
 (2) מתכנס ל-  $\frac{1}{3}$ .  
 (3) מתבדר.
- (4) מתכנס ל-  $-\frac{64}{7}$ .  
 (5) מתכנס ל-  $\frac{11}{12}$ .  
 (6) מתכנס ל- 8.
- (7) מתכנס ל-  $\frac{1}{2}$ .  
 (8) מתכנס ל-  $\frac{1}{12}$ .  
 (9) מתבדר.
- (10)  $S = \frac{1}{\ln 2}$   
 (11)  $\frac{1}{12}$
- (12) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.  
 ד. מתבדר. ה. מתכנס. ו. מתכנס.
- (13) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
- (14)  $\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$
- (15)  $\frac{323}{1221}$

## מבחן ההתבדרות של טורים

### שאלות

1) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ ג.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ב.	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$ א.
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$ ו.	$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ ה.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+2}$ ד.

### תשובות סופיות

1) א-ו: מתבדר.

## מבחני התכנסות לטורים חיוביים

### שאלות

#### מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-5 (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1} \quad (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (5) \quad (p \leq 1) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (4) \quad (p > 1)$$

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ .

ב. מצאו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$ .

#### מבחן השוואה ומבחן השוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-15 (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}} \quad (9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \sin^2 n}{n!} \quad (12) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-2}{3^n+2n} \quad (11) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} \quad (15) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad (14) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \quad (13)$$

מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן ראָפֶּה

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (21) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (23) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \quad (26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \quad (25)$$

### תשובות סופיות

- |               |             |             |
|---------------|-------------|-------------|
| (1) מתבדר.    | (2) מתבדר.  | (3) מתכנס.  |
| (4) מתכנס.    | (5) מתבדר.  |             |
| (6) א. מתכנס. | ב. 0        |             |
| (7) מתכנס.    | (8) מתבדר.  | (9) מתכנס.  |
| (10) מתבדר.   | (11) מתכנס. | (12) מתכנס. |
| (13) מתבדר.   | (14) מתכנס. | (15) מתכנס. |
| (16) מתבדר.   | (17) מתכנס. | (18) מתכנס. |
| (19) מתכנס.   | (20) מתכנס. | (21) מתכנס. |
| (22) מתכנס.   | (23) מתכנס. | (24) מתכנס. |
| (25) מתבדר.   | (26) מתבדר. |             |

## מבחני התכנסות לטורים כלליים

### מבחן לייבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-3 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

### מבחן דיריכלה

בשאלות 4 ו-5, קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר :

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{2}{16} + \dots \quad (4)$$

$$\sum \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n+1} \quad (5)$$

$$(6) \quad \text{הוכיחו שהטורים } \sum \sin n\theta, \sum \cos n\theta, \text{ כאשר } \theta \neq 2\pi k, \text{ חסומים.}$$

(7) הוכיחו את התכנסות הטורים הבאים :

$$. (\theta \neq 2\pi k) \quad \sum \frac{\sin n\theta}{n}, \quad \sum \frac{\cos n\theta}{n+1}, \quad \sum \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}}$$

$$(8) \quad \text{בדקו התכנסות הטור } \sum \frac{\sin^2 n}{n}.$$

$$(9) \quad \text{הוכיחו שאם הסדרה } b_n \text{ יורדת ושואפת לאפס, אז הטור } \sum b_n \sin n \text{ מתכנס.}$$

(10) ענו על שני הסעיפים הבאים :

$$א. \text{ הוכיחו שהטור } \sum_{n=1}^{\infty} (3-n)(\text{mod } 7) \text{ הוא טור חסום.}$$

$$ב. \text{ בדקו את התכנסות הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-n)(\text{mod } 7)}{\sqrt{n+1}}.$$

**מבחן אבל**

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר:

$$\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}} \quad (12)$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\sqrt{n+4}} \quad (11)$$

$$\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2} \quad (14)$$

$$\sum \frac{(-1)^n \ln(1+n^{-1})}{n} \quad (13)$$

**תשובות סופיות**

- |                |             |             |
|----------------|-------------|-------------|
| (1) מתכנס.     | (2) מתכנס.  | (3) מתכנס.  |
| (4) מתכנס.     | (5) מתכנס.  | (6) הוכחה.  |
| (7) הוכחה.     | (8) מתבדר.  | (9) הוכחה.  |
| (10) א. הוכחה. | ב. מתכנס.   | (11) מתכנס. |
| (12) מתכנס.    | (13) מתכנס. | (14) מתכנס. |

## התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

### שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \quad (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} \quad (5) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (7)$$

### תשובות סופיות

- |                  |                  |                  |
|------------------|------------------|------------------|
| (1) מתבדר.       | (2) מתכנס בהחלט. | (3) מתכנס בתנאי. |
| (4) מתכנס בתנאי. | (5) מתכנס בהחלט. | (6) מתכנס בהחלט. |
| (7) מתכנס בתנאי. | (8) מתכנס בתנאי. | (9) מתכנס בתנאי. |

## תרגילי תיאוריה

(1) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם  $\sum a_n$  מתכנס ו- $\sum b_n$  מתבדר, אז  $\sum (a_n + b_n)$  מתבדר.

ב. אם  $\sum a_n$  מתבדר ו- $\sum b_n$  מתבדר, אז  $\sum (a_n + b_n)$  מתבדר.

(2) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם  $\sum a_n^2$  מתכנס, אז  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט.

ב. אם  $\sum a_n$  חיובי ומתכנס, אז  $\sum \frac{1}{a_n}$  מתבדר.

ג. אם  $\sum a_n$  מתכנס, אז  $\sum a_n^2$  מתכנס.

(3) הוכיחו: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$  מתבדר.

(4) הוכיחו: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ומתכנס, אז גם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  מתכנס.

(5) נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .

הוכיחו כי  $\sum \left(1 - \frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$  מתכנס.

(6) א. נתון טור חיובי  $\sum a_n$ .

הוכיחו כי  $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס  $\sum a_n$ .

הוכיחו ש- $\sum |a_n|$  מתבדר אם  $\sum a_n^2$  מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

(7) תהי  $(a_n)$  סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכיחו כי  $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$  מתכנס.

(8)  $\sum a_n$  הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי  $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$  מתכנס.

(9) הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה  $(a_n)_{n \geq 1}$  מקיימת  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$  לכל  $n$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  מתכנס.

(10) נניח כי  $a_n \geq 0$ .

הוכיחו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$  מתכנס.

(11) הוכיחו או הפריכו:

אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס והסדרה  $b_n$  חסומה, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  מתכנס.

(12) הוכיחו: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בתנאי, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$  מתבדר.

(13) הוכיחו או הפריכו:

אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בתנאי ואם  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנס בתנאי.

(14) נתון טור חיובי  $\sum a_n$ .

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  לכל  $n$ , אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  לכל  $n$ , אז הטור מתבדר.

(15) נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .

הוכיחו כי  $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$  מתכנס.

**(16)** נתונים שני טורים חיוביים  $\sum a_n, \sum b_n$ .

א. נתון שהטורים  $\sum a_n^2, \sum b_n^2$  מתכנסים.

1. הוכיחו כי  $\sum a_n b_n$  מתכנס.

2. הוכיחו כי  $\sum (a_n + b_n)^2$  מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .

הוכיחו כי  $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$  מתכנס.

**(17)** הוכיחו:

א. אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ואם  $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = k \neq 0$ , אז הטור מתבדר.

ב. אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ואם  $\sum (na_n - k)$  מתכנס (כאשר  $k \neq 0$ ),

אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתבדר.

**(18)** הוכיחו כי אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ואם  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 a_n) = k$ , אז הטור מתכנס.

**(19)** נתון  $a_n \geq 0$  לכל  $n$ .

א. נתון כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n^2 = k > 0$ .

הוכיחו כי  $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  מתכנס.

ב. נתון כי  $\sum (n^3 a_n^2 - k)$  מתכנס (כאשר  $k > 0$ ).

הוכיחו כי  $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  מתכנס.

**(20)** הסדרה  $(a_n)$  מוגדרת על ידי  $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ ,  $a_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $a_1 = \frac{21}{20}$ , כאשר  $(n \geq 1)$ .

האם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס?

$$(21) \text{ הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מוגדר כך: } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$$

הוכיחו כי הטור מתכנס.

$$(22) \text{ נתון טור חיובי ומתכנס } \sum a_n, \text{ ונתון כי לכל } n \text{ מתקיים } a_{n+1} \leq a_n. \text{ הוכיחו כי } \sum n(a_n - a_{n+1}) \text{ מתכנס.}$$

$$(23) \text{ נתון } \forall n \geq 1: 0 < a_n < 1, 4a_n(1 - a_{n+1}) > 1.$$

$$\text{האם } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - 1) \text{ מתכנס?}$$

$$(24) \text{ נניח כי } (a_n) \text{ סדרה המקיימת } a_n > 0, a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1} \text{ לכל } n \text{ טבעי. הוכיחו כי } \sum a_n \text{ מתבדר.}$$

$$(25) (a_n) \text{ היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.}$$

$$\text{הוכיחו כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \text{ מתבדר.}$$

$$(26) \text{ נתון טור חיובי } \sum a_n.$$

הוכיחו או הפריכו:

א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.

ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

$$(27) \text{ ענו על הסעיפים הבאים:}$$

$$\text{א. הוכיחו כי הסדרה } a_n \text{ מתכנסת אם ורק אם } \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) \text{ מתכנס.}$$

$$\text{ב. בדקו האם הסדרה } a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \text{ מתכנסת.}$$

$$\text{ג. בדקו האם הסדרה } a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \text{ מתכנסת.}$$

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא טורי מקלורן עם שארית לגראנז'.

**(28)** פונקציה  $f$  מוגדרת לכל  $x$ , גזירה ב-0 ומקיימת  $f(0) = 0$ . הוכיחו כי אם  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט, אז  $\sum f(a_n)$  מתכנס בהחלט.

**(29)** נתון  $p(x)$  פולינום.

$\sum a_n$  מתכנס בהחלט.

הוכיחו כי  $\sum P(a_n)$  מתכנס  $\Leftrightarrow p(0) = 0$ .

**(30)** יהיו  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  טורים חיוביים.

נתון כי:

(1) הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנס. (2)  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$  לכל  $n$  טבעי.

הוכיחו כי הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: [GooL.co.il](http://GooL.co.il)