# חדוא 2

## פרק 4 - טורים עם איברים קבועים

### תוכן העניינים


1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים. . . . . 1
2. מבחן ההתבדרות של טורים. . . . . 4
3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים . . . . . 5
4. מבחני התכנסות לטורים כלליים. . . . . 7
5. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי . . . . . 9
6. תרגילי תיאוריה. . . . . 10

# טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

## שאלות

### טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-6**.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty}(0.44)^n$

**2)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{7^{n+1}}$

**3)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{4^{n+2}}$

**4)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-4)\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$

**5)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-5)^n}{7^n}$

**6)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

### טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **7-11**.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

**7)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

**8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n-1)}$

**9)** $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

**10)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))}$

**11)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

### טור הרמוני מוכלל

**12)** בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5n}$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2/3}$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\sqrt[3]{n^4}}$

ו. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^e}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**תכונות אלגבריות של טורים**

**13)** בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4^n}{7^{n+1}}+n^{-1.5}\right)$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n^2}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

**14)** חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

**15)** מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא $0.123123123...+0.141414...$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$.
2) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$.
3) מתבדר.
4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$.
5) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$.
6) מתכנס ל- $8$.
7) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$.
8) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$.
9) מתבדר.
10) $S=\frac{1}{\ln 2}$
11) $\frac{1}{12}$
12) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
ד. מתבדר. ה. מתכנס. ו. מתכנס.
13) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
14) $\frac{\pi^2}{6}-\frac{5}{4}$
15) $\frac{323}{1221}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מבחן ההתבדרות של טורים

## שאלות

**1)** בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+2}$ ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$

## תשובות סופיות

**1)** א-ו: מתבדר.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מבחני התכנסות לטורים חיוביים

## שאלות

### מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-5** (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+5}}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n^2+1}$

**4)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p>1)$ **5)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p\le 1)$

**6)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3}$.

ב. מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty}n^2e^{-n^3}$.

### מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **7-15** (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

**7)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+10n+1}$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$ **9)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}}$

**10)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}}$ **11)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-2}{3^n+2n}$ **12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\sin^2 n}{n!}$

**13)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ **14)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ **15)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן רַאבֶּה**

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n!\cdot3^n}$

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$

21) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{1000}e^{-n}$

22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(1+n^2)}{n!}$

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

25) $\sum\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}$

26) $\sum\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$

## תשובות סופיות

1) מתבדר.
2) מתבדר.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתבדר.
6) א. מתכנס. ב. 0
7) מתכנס.
8) מתבדר.
9) מתכנס.
10) מתבדר.
11) מתכנס.
12) מתכנס.
13) מתבדר.
14) מתכנס.
15) מתכנס.
16) מתבדר.
17) מתכנס.
18) מתכנס.
19) מתכנס.
20) מתכנס.
21) מתכנס.
22) מתכנס.
23) מתכנס.
24) מתכנס.
25) מתבדר.
26) מתבדר.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מבחני התכנסות לטורים כלליים

**מבחן לייבניץ**

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-3**:

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$ **2)** $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

**מבחן דיריכלה**

בשאלות **4** ו-**5**, קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר:

**4)** $1+\frac{1}{4}-\frac{2}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\frac{2}{16}+\ldots$

**5)** $\sum\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n+1}$

**6)** הוכיחו שהטורים $\sum\cos n\theta,\ \sum\sin n\theta$, כאשר $\theta\neq 2\pi k$, חסומים.

**7)** הוכיחו את התכנסות הטורים הבאים:
$\sum\frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}},\quad \sum\frac{\cos n\theta}{n+1},\quad \sum\frac{\sin n\theta}{n}\ (\theta\neq 2\pi k)$.

**8)** בדקו התכנסות הטור $\sum\frac{\sin^2 n}{n}$.

**9)** הוכיחו שאם הסדרה $b_n$ יורדת ושואפת לאפס, אז הטור $\sum b_n\sin n$ מתכנס.

**10)** ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}(3-n)(\bmod 7)$ הוא טור חסום.

ב. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-n)(\bmod 7)}{\sqrt{n+1}}$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**מבחן אבל**

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר:

**11)** $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

**12)** $\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}}$

**13)** $\sum \frac{(-1)^n \ln\left(1+n^{-1}\right)}{n}$

**14)** $\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2}$

## תשובות סופיות

**1)** מתכנס. **2)** מתכנס. **3)** מתכנס.

**4)** מתכנס. **5)** מתכנס. **6)** הוכחה.

**7)** הוכחה. **8)** מתבדר. **9)** הוכחה.

**10)** א. הוכחה. ב. מתכנס. **11)** מתכנס.

**12)** מתכנס. **13)** מתכנס. **14)** מתכנס.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

## שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$

6) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+n\ln n}{n^2}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

## תשובות סופיות

1) מתבדר.
2) מתכנס בהחלט.
3) מתכנס בתנאי.
4) מתכנס בתנאי.
5) מתכנס בהחלט.
6) מתכנס בהחלט.
7) מתכנס בתנאי.
8) מתכנס בתנאי.
9) מתכנס בתנאי.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# תרגילי תיאוריה

**1)** להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

**2)** להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

**3)** הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+(-1)^n\right)$ מתבדר.

**4)** הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

**5)** נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum\left(1-\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ מתכנס.

**6)** א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו ש- $\sum |a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

**7)** תהי $(a_n)$ סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכיחו כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n+4^n}{a_n+10^n}$ מתכנס.

**9)** הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה $(a_n)_{n\geq 1}$ מקיימת $0\leq a_n\leq \frac{1}{n}$ לכל $n$, אז $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

**10)** נניח כי $a_n\geq 0$.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

**11)** הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה $b_n$ חסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

**12)** הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

**13)** הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, אז $\sum b_n$ מתכנס בתנאי.

**14)** נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ לכל $n$, אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ לכל $n$, אז הטור מתבדר.

**15)** נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכיחו כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכיחו כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

**17)** הוכיחו:

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n\to\infty}(na_n) = k \neq 0$, אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס (כאשר $k \neq 0$),

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

**18)** הוכיחו כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n\to\infty}(n^2 a_n) = k$, אז הטור מתכנס.

**19)** נתון $a_n \geq 0$ לכל $n$.

א. נתון כי $\lim_{n\to\infty} n^3 a_n^2 = k > 0$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס (כאשר $k > 0$).

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

**20)** הסדרה $(a_n)$ מוגדרת על ידי $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{21}{20}$, כאשר $(n \geq 1)$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**21)** הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מוגדר כך: $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$.

הוכיחו כי הטור מתכנס.

**22)** נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$,

ונתון כי לכל $n$ מתקיים $a_{n+1} \le a_n$.

הוכיחו כי $\sum n(a_n - a_{n+1})$ מתכנס.

**23)** נתון $\forall n \ge 1:\ 0 < a_n < 1\ ,\ 4a_n(1-a_{n+1}) > 1$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 - 1\right)$ מתכנס?

**24)** נניח כי $(a_n)$ סדרה המקיימת $a_n > 0\ ,\ a_n \le a_{2n} + a_{2n+1}$ לכל $n$ טבעי.

הוכיחו כי $\sum a_n$ מתבדר.

**25)** $(a_n)$ היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

**26)** נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.

ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

**27)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הסדרה $a_n$ מתכנסת אם ורק אם $\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n - a_{n-1}\right)$ מתכנס.

ב. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ מתכנסת.

ג. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ מתכנסת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא **טורי מקלורן עם שארית לגראנז'**.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**28)** פונקציה $f$ מוגדרת לכל $x$, גזירה ב- $0$ ומקיימת $f(0)=0$.
הוכיחו כי אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum f(a_n)$ מתכנס בהחלט.

**29)** נתון $p(x)$ פולינום.
$\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
הוכיחו כי $\sum P(a_n)$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $p(0)=0$.

**30)** יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים.
נתון כי:
(1) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.(2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ לכל $n$ טבעי.
הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©