

## חדוֹא 2

### פרק 21 - טורים עם איברים קבועים

#### תוכן העניינים

- 1. טורים מתכנסים וטורים מותבדרים.
- 2. מבחני התכנסות לטורים.
- 3. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי.
- 4. תרגילי תיאוריה.

## טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

### שאלות

#### טור גיאומטרי

בדקו את התכונות הטורים בשאלות 1-6. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \quad (4)$$

#### טור טלקופי

בדקו את התכונות הטורים בשאלות 7-11. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (11)$$

#### טור הרמוני מוכפל

12) בדקו את התכונות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad \text{ג.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ב.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad \text{ד.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad \text{ה.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad \text{צ.}$$

### תכונות אלגבריות של טורים

**(13)** בדקו את התכונות הטוריים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \quad \text{ג.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2} \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right) \quad \text{א.}$$

**(14)** חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)^2}$ , אם ידוע כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

### תשובות סופיות

**1)** מתכנס ל-  $\frac{11}{14}$ .      **2)** מתכנס ל-  $\frac{1}{3}$ .      **3)** מתבדר.

**4)** מתכנס ל-  $-\frac{64}{7}$ .      **5)** מתכנס ל-  $\frac{11}{12}$ .      **6)** מתכנס ל-8.

**7)** מתכנס ל-  $\frac{1}{2}$ .      **8)** מתכנס ל-  $\frac{1}{12}$ .      **9)** מתבדר.

$$S = \frac{1}{\ln 2} \quad \text{(10)}$$

**(11)** א. מתכנס.      ב. מתבדר.

ד. מתבדר.      ה. מתכנס.

**(12)** ג. מתבדר.      ב. מתכנס.

**(13)** א. מתכנס.      ב. מתבדר.

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} \quad \text{(14)}$$

## מבחני התכנסות לטורים

### שאלות

#### מבחן ההתבדרות

1) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+n}{n} \right)^n \quad \text{ד.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2} \quad \text{ג.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln n \quad \text{א.}$$

#### מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 2-5 (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + 1} \quad (2)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p \leq 1) \quad (5)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p > 1) \quad (4)$$

6) ענו על הסעיפים הבאים :

א. בדקו את התכנסות הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

ב. מצאו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$ .

#### מבחן ההשוואה ו מבחן ההשוואה הכלולי

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4 + n + 1}} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 10n + 1} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2 + 1} \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{n^2 + 1} - n \right) \quad (11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2}{3^n + 2n} \quad (10)$$

### מבחן המנה ומבחן השורש

בדקו את התכונות הטוריים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n+2)} \quad (14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (21)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (20)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (19)$$

### תשובות סופיות

- |                  |               |
|------------------|---------------|
| (1) א-ו : מתבדר. | (2) מתבדר.    |
| (3) מתבדר.       | (4) מתכנס.    |
| (5) מתבדר.       | (6) א. מתכנס. |
| (7) מתכנס.       | (8) מתבדר.    |
| (9) מתבדר.       | (10) מתכנס.   |
| (11) מתבדר.      | (12) מתכנס.   |
| (13) מתבדר.      | (14) מתכנס.   |
| (15) מתבדר.      | (16) מתכנס.   |
| (17) מתכנס.      | (18) מתכנס.   |
| (19) מתכנס.      | (20) מתכנס.   |

## התכנסות בהחלט וההתכנסות בתנאי

### שאלות

#### מבחן לייבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-3:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3)$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

### התכנסות בהחלט וההתכנסות בתנאי

בשאלות 4-10 קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (8)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left( -\frac{1}{\ln n} \right)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (10)$$

### תשובות סופיות

- |                   |                  |
|-------------------|------------------|
| (1) מתכנס.        | (2) מתכנס.       |
| (4) מתבדר.        | (5) מתכנס בהחלט. |
| (7) מתכנס בתנאי.  | (8) מתכנס בתנאי. |
| (10) מתכנס בתנאי. |                  |

## תרגילי תיאוריה

### שאלות

**1)** להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.  
 א. אם  $\sum a_n$  מתכנס ו-  $\sum b_n$  מתבדר, אז  $\sum (a_n + b_n)$  מתבדר.  
 ב. אם  $\sum a_n$  מתבדר ו-  $\sum b_n$  מתכנס, אז  $\sum (a_n + b_n)$  מתבדר.

**2)** להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.  
 א. אם  $\sum a_n^2$  מתכנס, אז  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט.  
 ב. אם  $\sum a_n$  חיובי ומתכנס, אז  $\sum \frac{1}{a_n}$  מתבדר.  
 ג. אם  $\sum a_n^2$  מתכנס, אז  $\sum a_n$  מתכנס.

**3)** הוכיחו: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$  מתבדר.

**4)** הוכיחו: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  חיובי ומתכנס אז גם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.

**5)** א. נתון טור חיובי  $\sum a_n$ .  
 הוכיחו כי  $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  מתבדר.  
 ב. נתון טור חיובי ומתקנס  $\sum a_n$ .  
 הוכיחו ש-  $\sum |a_n|$  מתבדר.

**6)** תהי  $(a_n)$  סדרה חיובית השואפת לאינסוף.  
 הוכיחו כי  $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$  מתכנס.

**7)** הוא טור אי-שלילי ומתקנס.  
 הוכיחו כי  $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$  מתכנס.

8) הוכיחו או הפריכו :

אם הסדרה  $(a_n)_{n \geq 1}$  מקיימת  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$  מתכנס.

9) נתנו כי  $a_n \geq 0$ .

הוכיחו כי :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.

10) הוכיחו או הפריכו :

אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  מתכנס והסדרה  $b_n$  חסומה אז  $a_n$  מתכנס.

11) הוכיחו : אם  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$  מתכנס בתנאי או  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתבדר.

12) הוכיחו או הפריכו :

אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בתנאי ואם  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנס בתנאי.

13) נתון טור חיובי  $\sum a_n$ .  
הוכיחו או הפריכו :

א. אם מתקיימים  $1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \text{כל } n$ , אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיימים  $1 > \frac{a_{n+1}}{a_n} < \text{כל } n$ , אז הטור מתבדר.

14) נתון טור חיובי ומתקיים  $\sum a_n$ .

הוכיחו כי  $\sqrt{a_n a_{n+1}}$  מתכנס.

- 15)** נתונים שני טורים חיוביים  $\sum a_n$ ,  $\sum b_n$ .
- א. נתון שהטורים  $\sum a_n^2$ ,  $\sum b_n^2$  מתכנסים.
1. הוכיחו כי  $\sum a_n b_n$  מתכנס.
  2. הוכיחו כי  $\sum (a_n + b_n)^2$  מתכנס.
- ב. נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .  
הוכיחו כי  $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$  מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התאוריה תוכלו למצוא באתר : [GooL.co.il](http://GooL.co.il)