מתמטיקה להנדסאי תעשיה וניהול

פרק 21 - חשבון דיפרנציאלי - פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי

תוכן העניינים

1. הנגזרת של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי 1
2. שימושי הנגזרת 4

הנגזרת של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

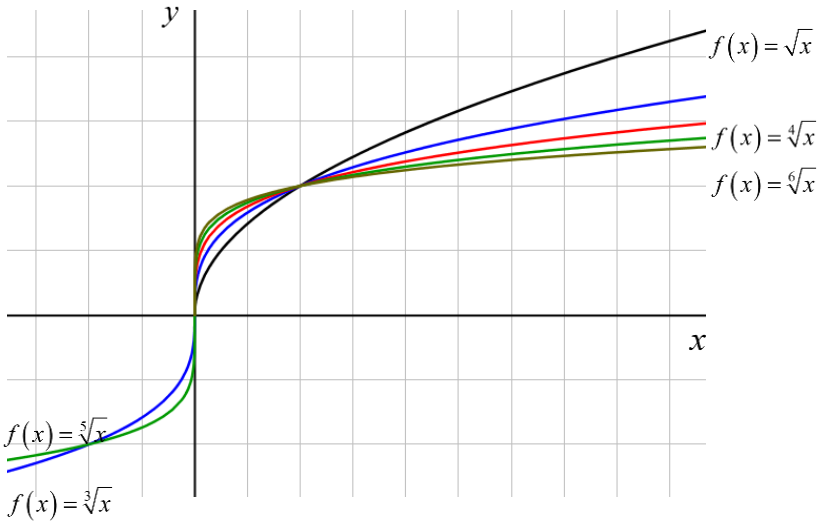
סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

הצורה הכללית של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי: $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$.

תזכורת: $\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}$.

להלן מספר דוגמאות לפונקציה מהצורה: $f(x)=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$:



תכונות כלליות:

1. פונקציית חזקה: $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$ מוגדרת לכל x עבור: n אי-זוגי
ומוגדרת לכל $x\geq 0$ עבור n זוגי.
2. הפונקציה: $f(x)=(ax+b)^{\frac{m}{n}}$ מוגדרת לכל x עבור: n אי-זוגי ולכל $x\geq -\frac{b}{a}$ עבור n זוגי.

נגזרת של פונקצית חזקה:

הפונקציה	הנגזרת
$y=x^{\frac{m}{n}}$	$y'=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$
$y=(ax+b)^{\frac{m}{n}}$	$y'=a\cdot\frac{m}{n}(ax+b)^{\frac{m}{n}-1}$

שאלות:

1) כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $y=\sqrt[4]{x}$ ב. $y=\sqrt[7]{x}$ ג. $y=\sqrt[3]{x+1}$ ד. $y=\sqrt[8]{2-3x}$

ה. $y=\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$ ו. $y=\frac{1}{\sqrt[7]{x}}$ ז. $y=\frac{3x}{\sqrt[3]{3x+7}}$ ח. $y=\frac{x^2-2x}{\sqrt[20]{(2x-4)^3}}$

2) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $y=4x+\sqrt[4]{x}$ ב. $y=27-\sqrt[3]{x+1}$

ג. $y=(x+2)^2\cdot\sqrt[3]{x}$ ד. $y=(3-x^3)\cdot\sqrt[6]{x}$

ה. $y=\sqrt[3]{(3x+1)^5}$ ו. $y=\sqrt[10]{(8-7x)^7}$

ז. $y=(x^2-4)\cdot\sqrt[8]{(4x+3)^3}$ ח. $y=x^3\cdot\sqrt[7]{1-x}$

ט. $y=\frac{6}{\sqrt[5]{x+2}}$ י. $y=\frac{2}{\sqrt[7]{(4-3x)^4}}$

3) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ ב. $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

ג. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$

תשובות סופיות:

1) א. $x\geq 0$ ב. כל x ג. כל x ד. $x\leq \frac{2}{3}$

ה. $x>0$ ו. $x\neq 0$ ז. $x\neq -\frac{7}{3}$ ח. $x>2$

2) א. $y'=4+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ ב. $y'=-\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$ ג. $y'=\frac{(x+2)(7x+2)}{3\sqrt[3]{x^2}}$

ד. $y'=\frac{3-19x^3}{6\sqrt[6]{x^5}}$ ה. $y'=5\sqrt[3]{(3x+1)^2}$ ו. $y'=-\frac{49}{10\sqrt[10]{(8-7x)^3}}$

ז. $y'=\frac{9.5x^2+6x-6}{\sqrt[8]{(4x+3)^5}}$ ח. $y'=\frac{21x^2-22x^3}{7\sqrt[7]{(1-x)^6}}$ ט. $y'=-\frac{6}{5\sqrt[5]{(x+2)^6}}$

י. $y'=\frac{24}{7\sqrt[7]{(4-3x)^{11}}}$

3) א. $f'(x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$, $f''(x)=-\frac{2}{9\cdot\sqrt[3]{x^4}}$

ב. $f'(x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$, $f''(x)=-\frac{2}{9}\frac{x^2+3}{(x^2-1)^{5/3}}$

ג. $f'(x)=\frac{2-5x}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$, $f''(x)=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$

שימושי הנגזרת:

שאלות:

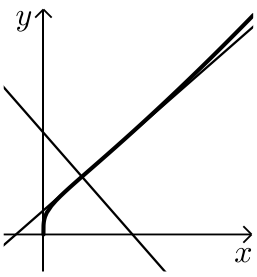
4) לפניך מספר פונקציות.
מצא את ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה המצוינת לידה:

א. $y=\frac{10}{\sqrt[5]{x^4}}$; $x=1$

ב. $y=2x+\sqrt[3]{3x-1}$; $x=3$

5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y=\sqrt[4]{6-x}-x$ בנקודה שבה: $x=-10$.

6) באיור שלפניך נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=(2x+4)\cdot\sqrt[4]{x}$.

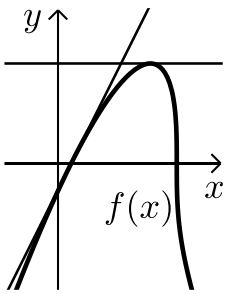


א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך $(1,6)$.

ב. מצא את משוואת הנורמל לפונקציה בנקודה $(1,6)$.

ג. חשב את השטח הנוצר ע"י שני הישרים והצירים.

7) באיור שלפניך מתואר הגרף של הפונקציה: $f(x)=(x-1)\cdot\sqrt[3]{9-x}$.



א. מצא נקודה על הפונקציה ששיפוע המשיק העובר דרכה הוא 0.

ב. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת בסעיף הקודם.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה-x הקרובה יותר לראשית.

ד. חשב את שטח המשולש הנוצר בין שני המשיקים שמצאת וציר ה-y.

8) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\sqrt[4]{2x+7}-Ax^2$ (A פרמטר).

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=4.5$ הוא: $m=-\frac{1}{2}$.

מצא את A.

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt[5]{1-x}}{Ax+B}$, (A,B פרמטרים). משוואת המשיק לגרף הפונקציה דרך הנקודה: $x=2$ היא: $45y=2x-19$. מצא את A ואת B.

תשובות סופיות:

4) א. -8 ב. 2.25.

5) $33x+32y-54=0 \leftarrow y=-\frac{33}{32}x+1\frac{11}{16}$.

6) א. $y=3.5x+2.5$ ב. $y=-\frac{2}{7}x+6\frac{2}{7}$ ג. 67.25 סמ"ר

7) א. $\left(7,6\sqrt[3]{2}\right)$ ב. $y=6\sqrt[3]{2}$ ג. $y=2x-2$ ד. 22.84 סמ"ר

8) $A=\frac{1}{16}$

9) $A=B=1$