

# מתמטיקה למכינה באקדמיה

פרק 52 - חשבון דיפרנציאלי - פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי

תוכן העניינים

1. הנגזרת של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי..... 1
2. שימושי הנגזרת..... 4
3. חקירה של פונקצית חזקה..... 6

## הנגזרת של פונקציות חזקה עם מעריך רציונאלי:

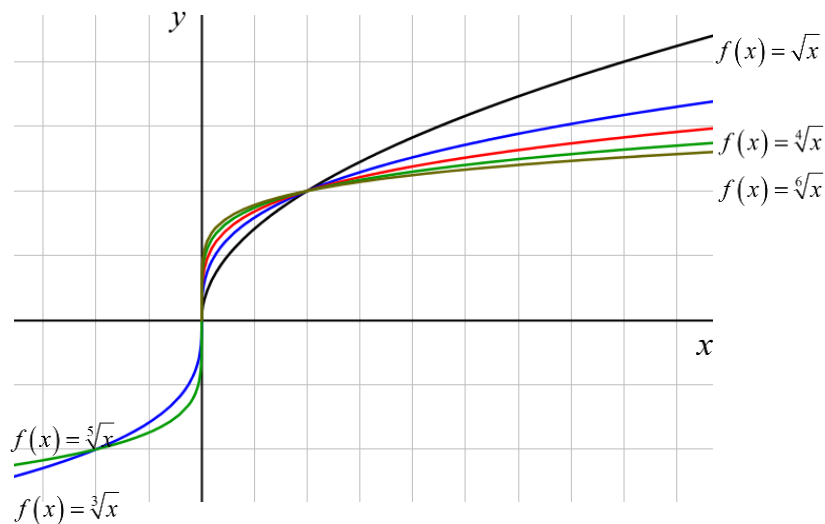
**סיכום כללי:**

**הגדרות כלליות:**

הצורה הכללית של פונקציות חזקה עם מעריך רציונאלי:  $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ .

תזכורת:  $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$ .

להלן מספר דוגמאות לפונקציה מהצורה:  $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ .



**תכונות כלליות:**

1. פונקציית חזקה:  $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$  מוגדרת לכל  $x$  עבור  $n$  אי-זוגי ומוגדרת לכל  $x \geq 0$  עבור  $n$  זוגי.
2. הפונקציה:  $f(x) = (ax+b)^{\frac{m}{n}}$  מוגדרת לכל  $x$  עבור  $n$  אי-זוגי ולכל  $x \geq -\frac{b}{a}$  עבור  $n$  זוגי.

**נגזרת של פונקציות חזקה:**

הפונקציה	הנגזרת
$y = x^{\frac{m}{n}}$	$y' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$
$y = (ax+b)^{\frac{m}{n}}$	$y' = a \cdot \frac{m}{n} (ax+b)^{\frac{m}{n}-1}$

**שאלות:**

(1) כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א.  $y = \sqrt[4]{x}$     ב.  $y = \sqrt[7]{x}$     ג.  $y = \sqrt[3]{x+1}$     ד.  $y = \sqrt[8]{2-3x}$   
 ה.  $y = \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$     ו.  $y = \frac{1}{\sqrt[7]{x}}$     ז.  $y = \frac{3x}{\sqrt[3]{3x+7}}$     ח.  $y = \frac{x^2-2x}{\sqrt[20]{(2x-4)^3}}$

(2) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $y = 4x + \sqrt[4]{x}$     ב.  $y = 27 - \sqrt[3]{x+1}$   
 ג.  $y = (x+2)^2 \cdot \sqrt[3]{x}$     ד.  $y = (3-x^3) \cdot \sqrt[6]{x}$   
 ה.  $y = \sqrt[3]{(3x+1)^5}$     ו.  $y = \sqrt[10]{(8-7x)^7}$   
 ז.  $y = (x^2-4) \cdot \sqrt[8]{(4x+3)^3}$     ח.  $y = x^3 \cdot \sqrt[7]{1-x}$   
 ט.  $y = \frac{6}{\sqrt[5]{x+2}}$     י.  $y = \frac{2}{\sqrt[7]{(4-3x)^4}}$

(3) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$     ב.  $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$   
 ג.  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x)$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x \geq 0 \quad \text{ב. כל } x \quad \text{ג. כל } x \quad \text{ד. } x \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{ה. } x > 0 \quad \text{ו. } x \neq 0 \quad \text{ז. } x \neq -\frac{7}{3} \quad \text{ח. } x > 2$$

$$(2) \quad \text{א. } y' = 4 + \frac{1}{4\sqrt{x^3}} \quad \text{ב. } y' = -\frac{1}{3\sqrt{(x+1)^2}} \quad \text{ג. } y' = \frac{(x+2)(7x+2)}{3\sqrt{x^2}}$$

$$\text{ד. } y' = \frac{3-19x^3}{6\sqrt{x^5}} \quad \text{ה. } y' = 5\sqrt{(3x+1)^2} \quad \text{ו. } y' = -\frac{49}{10\sqrt{(8-7x)^3}}$$

$$\text{ז. } y' = \frac{9.5x^2 + 6x - 6}{\sqrt[8]{(4x+3)^5}} \quad \text{ח. } y' = \frac{21x^2 - 22x^3}{7\sqrt{(1-x)^6}} \quad \text{ט. } y' = -\frac{6}{5\sqrt{(x+2)^6}}$$

$$\text{י. } y' = \frac{24}{7\sqrt{(4-3x)^{11}}}$$

$$(3) \quad \text{א. } f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}}$$

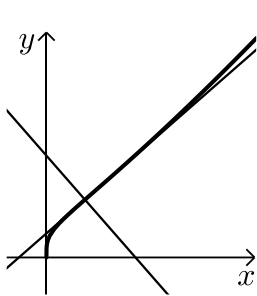
$$\text{ב. } f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, f''(x) = -\frac{2}{9} \frac{x^2+3}{(x^2-1)^{5/3}}$$

$$\text{ג. } f'(x) = \frac{2-5x}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$$

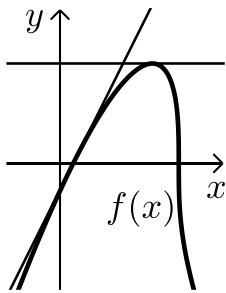
## שימושי הנגזרת:

### שאלות:

- 4) לפניך מספר פונקציות.  
מצא את ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה המצוינת לידה:
- א.  $y = \frac{10}{\sqrt[5]{x^4}}$  ;  $x = 1$   
ב.  $y = 2x + \sqrt[3]{3x-1}$  ;  $x = 3$
- 5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $y = \sqrt[4]{6-x} - x$  בנקודה שבה:  $x = -10$ .



- 6) באיור שלפניך נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = (2x+4) \cdot \sqrt[4]{x}$ .
- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך  $(1, 6)$ .
- ב. מצא את משוואת הנורמל לפונקציה בנקודה  $(1, 6)$ .
- ג. חשב את השטח הנוצר ע"י שני הישרים והצירים.



- 7) באיור שלפניך מתואר הגרף של הפונקציה:  $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt[3]{9-x}$ .
- א. מצא נקודה על הפונקציה ששיפוע המשיק העובר דרכה הוא 0.
- ב. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת בסעיף הקודם.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  הקרובה יותר לראשית.
- ד. חשב את שטח המשולש הנוצר בין שני המשיקים שמצאת וציר ה- $y$ .

- 8) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \sqrt[4]{2x+7} - Ax^2$ , ( $A$  פרמטר).  
ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = 4.5$  הוא:  $m = -\frac{1}{2}$ .  
מצא את  $A$ .

- (9) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt[5]{1-x}}{Ax+B}$  ,  $(A, B)$  פרמטרים). משוואת המשיק לגרף הפונקציה דרך הנקודה:  $x=2$  היא:  $45y = 2x - 19$  . מצא את  $A$  ואת  $B$  .

**תשובות סופיות:**

- (4) א. -8      ב. 2.25
- (5)  $33x + 32y - 54 = 0 \leftarrow y = -\frac{33}{32}x + 1\frac{11}{16}$
- (6) א.  $y = 3.5x + 2.5$       ב.  $y = -\frac{2}{7}x + 6\frac{2}{7}$       ג. 67.25 סמ"ר
- (7) א.  $(7, 6\sqrt[3]{2})$       ב.  $y = 6\sqrt[3]{2}$       ג.  $y = 2x - 2$       ד. 22.84 סמ"ר
- (8)  $A = \frac{1}{16}$
- (9)  $A = B = 1$

## חקירה של פונקציות חזקה:

### שאלות:

10 חקור את הפונקציה:  $f(x) = (x^2 - 36)\sqrt[4]{x}$  לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה.
- מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- מציאת נקודות קיצון מקומיות (פנימיות) וקצה וקביעת סוגן.
- מציאת תחומי העלייה והירידה.
- מציאת אסימפטוטות אנכיות.
- סרטוט סקיצה.

11 חקור את הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt[5]{8x-2}}{x^2+1}$  לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה.
- מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- מציאת נקודות קיצון מקומיות (פנימיות) וקצה וקביעת סוגן.
- מציאת תחומי העלייה והירידה.
- מציאת אסימפטוטות אנכיות.
- סרטוט סקיצה.

12 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 6$ .

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- הוכח כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = -f(x)$ . קבע לגבי כל טענה האם היא נכונה או שגויה. נמק.
  - לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
  - שתי הפונקציות חותכות את הצירים באותן הנקודות.
  - שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.

- 13** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 + k\sqrt[3]{x} + 8$ ,  $k$  פרמטר.
- ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה:  $x = -2.741$ .
- מצא את ערך הפרמטר  $k$ , עגל למספר שלם.
  - הראה כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת גם היא על ציר ה- $x$ .
  - כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
  - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - העזר בסקיצה וקבע כמה פתרונות יהיו למשוואה הבאה:  $x^3 - 9\sqrt[3]{x} = 8$ .

- 14** נתונות הפונקציות הבאות:  $f(x) = (x-2)^2$ ,  $g(x) = \sqrt[3]{2x+2.6}$ .
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר ה- $x$ .
  - מגדירים פונקציה חדשה:  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ .
  - כתוב מפורשות את הפונקציה  $h(x)$  ואת תחום הגדרתה.
  - מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה  $h(x)$ .
  - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $h(x)$ .
  - מצא עבור אלו ערכים של  $k$  יחתוך הישר  $y = k$  את גרף הפונקציה ב-3 נקודות שונות.

- 15** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{5x^2 - 66x - 440}{\sqrt[3]{x}}$ .
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?  
האם יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית?
  - האם הפונקציה חותכת את הצירים בתחום:  $[0:18]$ ? נמק ע"י חישוב.
  - מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
  - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - מגדירים פונקציה נוספת  $g(x)$  המקיימת:  $g(x) = -f(x)$ .
- לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציה  $g(x)$ . קבע אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו שגויות. נמק ע"י הסבר או חישוב מתאים.
- $g(x)$  חיובית בכל התחום  $[0:18]$ .
  - ל- $g(x)$  אותן נקודות קיצון (אותם שיעורים ואותו סוג) כמו  $f(x)$ .
  - ל- $g(x)$  אותו תחום הגדרה כמו ל- $f(x)$ .

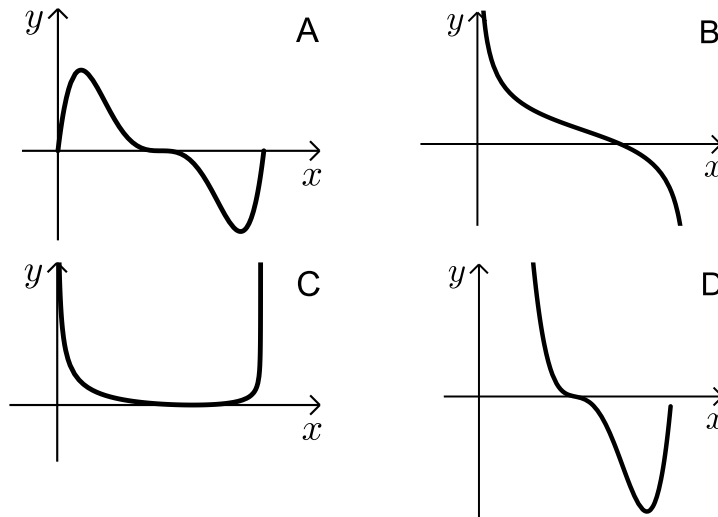
16 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{9-x}$ .

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצה) וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים קבע כמה פתרונות יש למשוואה הבאה:  $\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{9-x} = k$  כאשר:

i.  $k = -2$

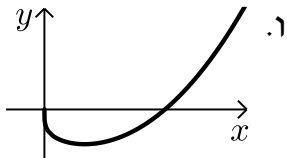
ii.  $k = 1$

- ה. קבע איזה מבין הגרפים הבאים (A-D) מתאר את הנגזרת של הפונקציה. נמק.



**תשובות סופיות:**

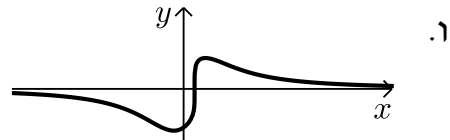
**(10)** א.  $x \geq 0$     ב.  $(0,0)$  ,  $(6,0)$     ג.  $\min(2,-38)$



ד. יורדת:  $0 < x < 2$ , עולה:  $x > 2$     ה. אין.    ו.  $\min\left(-\frac{2}{9}, -1.24\right)$  ,  $\max(0.5, 0.91)$

**(11)** א. כל  $x$     ב.  $(0, -1.14)$  ,  $(0.25, 0)$     ג.  $\min\left(-\frac{2}{9}, -1.24\right)$  ,  $\max(0.5, 0.91)$

ד. יורדת:  $x > \frac{1}{2}$  ,  $x < -\frac{2}{9}$ , עולה:  $-\frac{2}{9} < x < \frac{1}{2}$     ה. אין



**(12)** א.  $x \geq 0$     ב.  $(0, -6)$  ,  $(64, 0)$     ג. הנגזרת:  $f'(x) = \frac{1+2\sqrt[6]{x}}{6x^{5/6}} > 0$  בת.ה.

ה. i. נכון    ה. ii. לא נכון, החיתוך עם ציר ה- $y$  שונה.    ה. iii. לא נכון.

**(13)** א.  $k = -9$     ב.  $\min(1, 0)$  ,  $\max(-1, 16)$     ג. עולה:  $x < -1$  ,  $x > 1$

יורדת:  $-1 < x < 1$     ה. 2.

**(14)** א.  $(-1.3, 0)$  ,  $(2, 0)$     ב.  $h(x) = (x-2)^2 \sqrt[5]{2x+2.6}$  כל  $x$ .

ג.  $\min(2, 0)$  ,  $\max(-1, 8.126)$     ה.  $0 < k < 8.126$ .

**(15)** א.  $x = 0$  ,  $x > 0$  אסימפטוטה אנכית.    ב. לא

ג.  $\min(4, -495.27)$  ,  $\max(2, -491.77)$     ה. i. נכון    ה. ii. לא נכון.

ה. iii. נכון.

**(16)** א.  $0 \leq x \leq 9$     ב.  $\min(0, 0)$  ,  $\max(6, 3.22)$  קצה,  $\min(9, 0)$  קצה.

ג. עולה:  $0 < x < 6$ , יורדת:  $6 < x < 9$     ד. i.  $k = -2$  אין פתרון.

ii.  $k = 1$  שני פתרונות.    ה. B.

**סקיצות לשאלות:**

