מכינה מוגברת במתמטיקה (רמה מקבילה ל 5 יח"ל)

פרק 33 - חשבון דיפרנציאלי - פונקצית הערך המוחלט

תוכן העניינים

כתיבה וסרטוט של פונקצית ערך מוחלט:

סיכום כללי:

פונקציה הערך המוחלט מוגדרת: $f\left(x\right)=\left|x\right|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$.

כדי לסרטט פונקציות עם ערך מוחלט, או שמכילות ביטויים עם ערכים מוחלטים, יש לעקוב אחר השלבים הבאים:

1. יש למצוא את הנקודות שמאפסות את כל אחד מהערכים המוחלטים.
2. יש לחלק את הפונקציה לתחומים עבור כל האפשרויות הקיימות.
3. עבור כל תחום יש לכתוב את הפונקציה המתקבלת ללא סימן הערך המוחלט ולסרטט אותה במערכת צירים.

הערה:

ניתן להיעזר בטכניקה אלגברית בסיסית על מנת לפשט פונקציות בטרם הניתוח והסרטוט שלהן כגון: $f\left(x\right)=x^2\left|x\right|-3\left|x\right|=\left|x\right|\left(x^2-3\right)$.

שאלות:

1) לפניך הפונקציה הבאה: $f\left(x\right)=\left|x+4\right|-\left|4x\right|+1$.
כתוב את הפונקציה ללא סימן הערך המוחלט, כפונקציה מוגדרת למקוטעין.

2) לפניך הפונקציה הבאה: $f\left(x\right)=3x-\left|x+\left|3-x\right|\right|$.
כתוב את הפונקציה ללא סימן הערך המוחלט, כפונקציה מוגדרת למקוטעין.

סרטט את הפונקציות הבאות במערכת צירים:

3) $f\left(x\right)=\left|x\right|-1$

4) $f\left(x\right)=\left|x+2\right|$

5) $f\left(x\right)=\left|2x+1\right|+\left|x-3\right|$

6) $f\left(x\right)=\left|x-1\right|+\left|2-x\right|-3\cdot\left|x+1\right|+x$

7) $f\left(x\right)=2\left|x\right|+x$

8) $f\left(x\right)=x\left|x\right|$

9) $f\left(x\right)=x^2+2\left|x\right|-3$

10) $f\left(x\right)=\left|x^2+6x-8\right|$

11) $f(x)=-2x|x|+|7x|-5$

12) $f(x)=(x-3)|x+1|$

13) $f(x)=|9x-x^3|$

14) $f(x)=x^3-|x|$

15) $f(x)=|x|^3-4x^2$

16) $f(x)=2x^2|x|-7x|x|+3|x|$

17) לפניך הפונקציה: $f(x)=6x-2x^2$.

א. סרטט את $f(x)$ במערכת צירים.

ב. סרטט באותה מערכת הצירים את $g(x)=6|x|-2x^2$.

ג. הוסף למערכת הצירים את גרף הפונקציה: $h(x)=|6|x|-2x^2|$.

18) לפניך הפונקציה: $f(x)=9x^2-8x-1$.

מגדירים: $g(x)=9x|x|-8x-1$ ו- $h(x)=9x^2-8|x|-1$.

א. סרטט במערכת צירים אחת את הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$.

ב. סרטט במערכת צירים חדשה את הפונקציה $|h(x)|$.

19) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=\frac{|x|}{x}$ ו- $g(x)=\frac{x}{|x|}$.

האם המשוואות הנ"ל מייצגות את אותה הפונקציה?
אם כן – הסבר וסרטט את גרף הפונקציה, אם לא – נמק.

20) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות: $f(x)=|x^2-4|$, $g(x)=|x+1|+|x-2|$.

21) לפניך הפונקציות הבאות: $f(x)=|(x-2)(x+4)|$, $g(x)=|(x-5)(x+4)|$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

ב. כיצד תשתנה התוצאה אם במקום $g(x)$ ניקח: $h(x)=|(x-5)(x-4)|$?

22) נתונות הפונקציות: $f(x)=|x|x+3$ ו- $g(x)=ax^2$, $(a\neq 0)$.

מצא עבור אלו ערכים של a הגרפים נחתכים בשתי נקודות, נקודה אחת ולא נחתכים כלל.

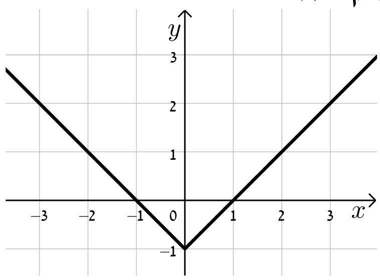
תשובות סופיות:

1) $f(x)=|x+4|-|4x|+1=\begin{cases}-3x+5 & x\ge 0\\ 5x+5 & -4\le x<0\\ 3x-3 & x<-4\end{cases}$.

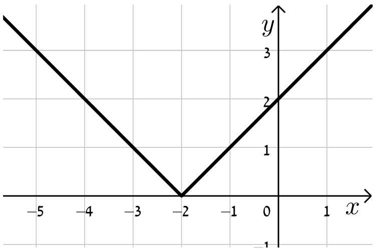
2) $f(x)=3x-|x+|3-x||=\begin{cases}x+3 & x\ge 3\\ 3x-3 & x<3\end{cases}$.

להלן סקיצות של הפונקציות:

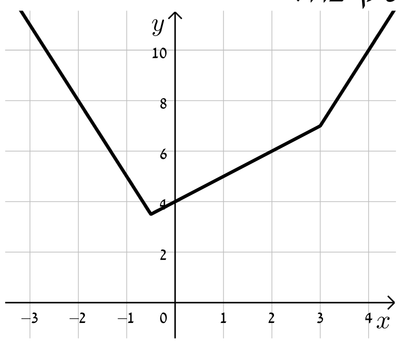
3) סקיצה:



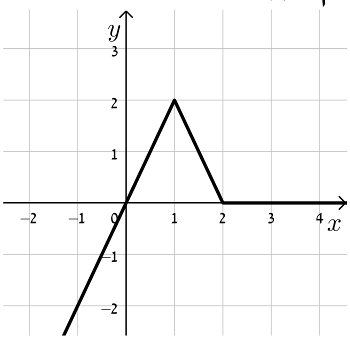
4) סקיצה:



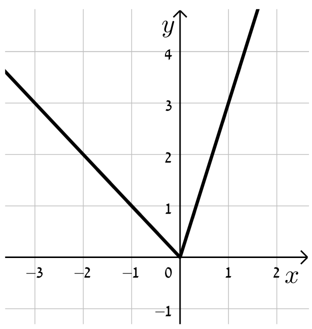
5) סקיצה:



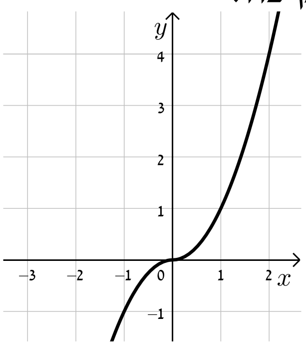
6) סקיצה:



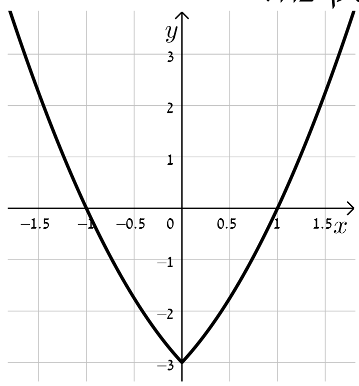
7) סקיצה:



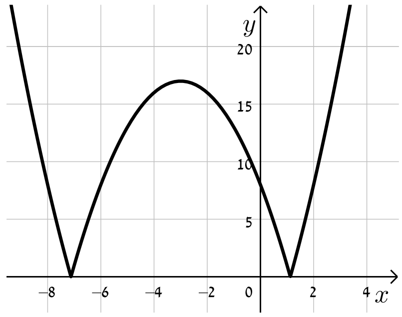
8) סקיצה:



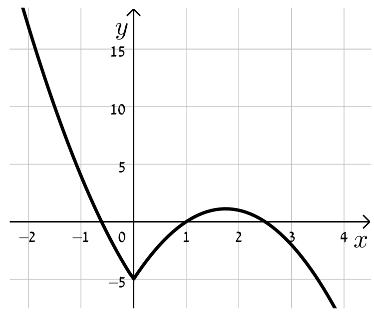
9) סקיצה:



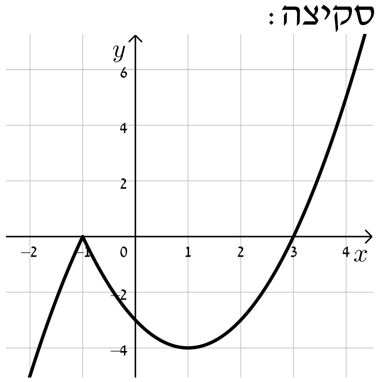
10) סקיצה:



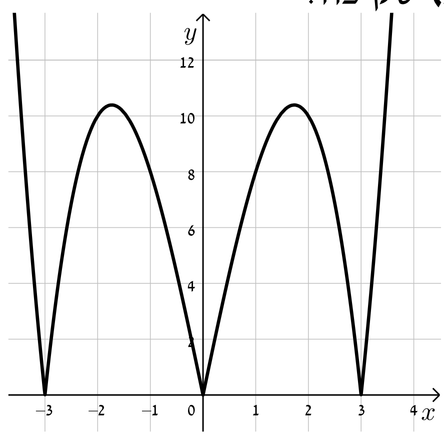
11) סקיצה:



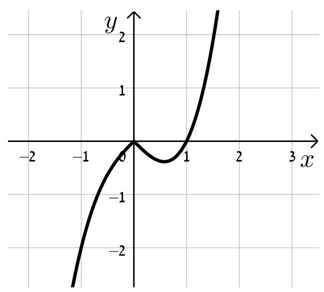
12) סקיצה:



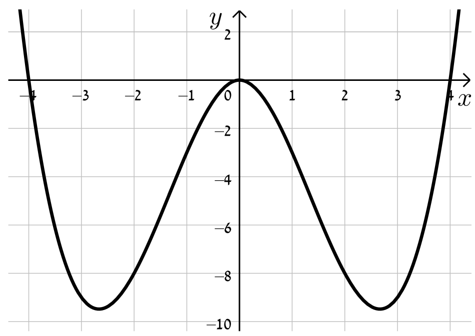
13) סקיצה:



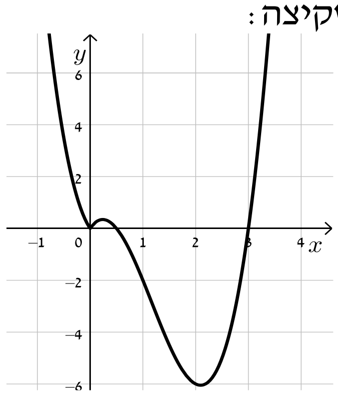
14) סקיצה:



15) סקיצה:



16) סקיצה:



17) פתרון מלא בסרטון הוידאו.

18) פתרון מלא בסרטון הוידאו.

19) כן, מדובר באותה הפונקציה.

20) $(-3.45,7.9)$, $(3,5)$, $(-1,3)$, $(1,3)$.

21) א. $(-4,0)$, $(3.5,11.25)$. ב. יהיה רק פתרון אחד והוא: $(2.55,3.57)$.

22) שני פתרונות: $a>1$, פתרון יחיד: $-1<a<1$ וגם $a\neq 0$ מת.ה., אף פתרון: $a\leq -1$.

תחום הגדרה של פונקציות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כדי למצוא תחום הגדרה של פונקציה עם ערך מוחלט יש לוודא כי הערכים של המשתנה לא יוצרים ביטויים חסרי משמעות (כגון חלוקה באפס, או ערך שלילי בתוך שורש ממעלה זוגית).

שאלות:

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

1) $f(x)=\left|x^2-1\right|+x+3$

2) $f(x)=\frac{|3-x|}{x-1}$

3) $f(x)=\frac{3}{x}+\frac{4}{|x|-4}$

4) $f(x)=\sqrt{|x|-2}$

5) $f(x)=\frac{|2x+1|-3}{\sqrt{4-|x|}}$

6) $f(x)=\frac{3}{2|\sin x|-1}$

תשובות סופיות:

1) כל x.

2) $x\neq 1$.

3) $x\neq 0\ ,\ \pm 4$.

4) $x\geq 2\ ,\ x\leq -2$.

5) $-4<x<4$.

6) $x\neq \frac{\pi}{6}+\pi k\ ,\ x\neq \frac{5\pi}{6}+\pi k$.

גזירה של פונקציות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

נגזרת של פונקצית הערך המוחלט: $f(x)=|x|$ היא: $f'(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$.

עבור פונקציה פנימית $f(x)=|g(x)|$ נעזר בכלל השרשרת: $f'(x)=\begin{cases}g(x) & g(x)>0\\ -g(x) & g(x)<0\end{cases}$.

הערה:

נסמן נקודת אפס של ביטוי עם ערך מוחלט ב- x_0 ונאמר כי אם ערך הנגזרת מימין ומשלא לנקודה זהה אז הפונקציה **גזירה** בנקודה x_0, אחרת היא אינה גזירה בנקודה זו.

דוגמא:

לפונקציה: $f(x)=|x|$ יש נקודת אפס $x_0=0$ והנגזרת: $f'(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$.

ערך הנגזרת הימני הוא $f'(x=0^+)=1$ והשמאלי הוא $f'(x=0^-)=-1$.

היות ו- $f'(x=0^-)\neq f'(x=0^+)$ נאמר כי הפונקציה אינה גזירה ב- $(0,0)$.

שאלות:

גזור את הפונקציות הבאות:

1) $f(x)=|x^2-3x+2|$

2) $f(x)=x^3+\frac{2}{3}|x|+1$

3) $f(x)=\frac{|x|}{x-1}$

4) $f(x)=\frac{x^2+1}{|x|+2}$

5) $f(x)=\sqrt{3x-|3-x|}$

6) $f(x)=\frac{5-x}{\sqrt{|x|+6}}$

7) $f(x)=\sin|x|$

8) $f(x)=\sqrt{3|x|-\cos x+1}$

9) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=x\cdot|x+2|+3$ בנקודות:

א. $x=-3$.

ב. $y=3$.

10) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x+|x|}{x+1}$.

א. הוכח כי הפונקציה מקיימת: $0\le f(x)<2$ לכל x בתחום הגדרתה.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=3$.

11) לפניך הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{|2x+1|+x^2}}$.

א. הראה כי הפונקציה מוגדרת לכל x.

ב. מצא את הערך המירבי של הפונקציה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר בנקודת החיתוך של הישר $y=\frac{3}{\sqrt{2}}$ וגרף הפונקציה ברביע השני.

תשובות סופיות:

1) $f'(x)=\begin{cases}2x-3 & x<1\,,\,x>2\\ -2x+3 & 1<x<2\end{cases}$, בנקודות $(1,0)$, $(2,0)$ הנגזרת לא קיימת.

2) $f'(x)=\begin{cases}3x^2+\frac{2}{3} & x>0\\ 3x^2-\frac{2}{3} & x<0\end{cases}$, בנקודה $(0,1)$ הנגזרת לא קיימת.

3) $f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{(x-1)^2} & x>0\,,\,x\neq 1\\ \frac{1}{(x-1)^2} & x<0\end{cases}$, בנקודה $(0,0)$ הנגזרת לא קיימת.

4) $f'(x)=\begin{cases}\frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2} & x>0\\ \frac{-x^2+4x+1}{(-x+2)^2} & x<0\end{cases}$, בנקודה $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ הנגזרת לא קיימת.

5) $f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{4x-3}} & \frac{3}{4}<x<3\\ \frac{1}{\sqrt{2x+3}} & x>3\end{cases}$, בנקודה $(3,3)$ הנגזרת לא קיימת.

6) $f'(x)=\begin{cases}\frac{-x-17}{2\left(\sqrt{x+6}\right)^3} & x>0\\ \frac{-x-7}{2\left(\sqrt{-x+6}\right)^3} & x<0\end{cases}$, בנקודה $\left(0,\frac{5}{\sqrt{6}}\right)$ הנגזרת לא קיימת.

7) $f'(x)=\begin{cases}\cos x & x>0\\ -\cos x & x<0\end{cases}$, בנקודה $(0,0)$ הנגזרת לא קיימת.

8) $f'(x)=\begin{cases}\frac{3+\sin x}{2\sqrt{3x-\cos x+1}} & x>0\\ \frac{-3+\sin x}{2\sqrt{-3x-\cos x+1}} & x<0\end{cases}$, בנקודה $(0,0)$ הנגזרת לא קיימת.

9) א. $y=4x+12$ ב. הפונקציה גזירה רק בנקודה $(0,3)$ ולכן נמצא את משוואת המשיק רק שם ונקבל: $y=2x+3$.

10) א. הוכחה. ב. $y=\frac{1}{8}x+1\frac{1}{8}$.

11) א. הוכחה. ב. 6. ג. $y=\frac{3}{\sqrt{2}}x+3\sqrt{2}$.

חקירה של פונקציות עם ערכים מוחלטים:

סיכום כללי:

כדי לחקור פונקציה שמכילה ביטויים עם ערכים מוחלטים נבצע את פעולות החקירה הרגילות תוך תשומת לב לחלוקת הפונקציה למקטעים לפי ערכי המשתנה המאפסים את הערכים המוחלטים.

- מציאת תחום הגדרה של פונקציה.
- גזירה של פונקציה, מציאת נקודות אי-גזירות, וקביעת סוג הקיצון.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת אסימפטוטות של גרף הפונקציה (במידה וישנן).
- מציאת נקודות פיתול ותחומי קמירות כלפי מעלה ומטה (במידה ונשאלים).
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה תוך הקפדה על נקודות אי רציפות, נקודות אי-גזירות וסימון מקטעים שונים על הגרף לפי המתבקש.

שאלות:

1) לפניך הפונקציה: $f(x)=x^3-\frac{3}{4}|x|+2$.

א. מה הן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=|x^2-4|+|x^2+x|$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. נתון הישר $y=x+k$, k פרמטר. מצא לאלו ערכים של k :

i. הישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות.

ii. הישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-3 נקודות שונות.

iii. הישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-2 נקודות שונות.

iv. הישר יחתוך את גרף הפונקציה באינסוף נקודות.

v. הישר לא יחתוך את גרף הפונקציה כלל.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x}{|x-2|}$.

א. כתוב את הנגזרת של הפונקציה והוכח כי אין לפונקציה נקודות קיצון.

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{|x|+a}$, a פרמטר.

ידוע כי הפונקציה אינה מוגדרת בתחום: $-1<x<1$.

א. מצא את a.

ב. הוכח כי הפונקציה היא זוגית.

ג. הראה כי הפונקציה עולה בתחום: $x>1$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $0<x<9$.

ה. היעזר בממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שציירת את גרף הפונקציה בתחום: $-9<x<0$.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=|\cos x|+\cos 2x$.

א. הוכח כי הפונקציה היא זוגית.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום $[0:\pi]$ וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום: $[0:\pi]$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום: $[-\pi:0]$.

6) נתונות שתי פונקציות: $f(x)=\sqrt{\cos x}$, $g(x)=\frac{x}{|x|}$.

א. הוכח כי $f(x)$ הינה פונקציה זוגית וכי $g(x)$ הינה פונקציה אי-זוגית.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0\le x\le\pi$.

ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה: $f(x)\cdot g(x)$ בתחום: $-\pi\le x\le\pi$.

תשובות סופיות:

1) א. $\min\left(\frac{1}{2},1\frac{3}{4}\right)$, $\max(0,2)$ ב. עולה: $x>\frac{1}{2}$, $x<0$, יורדת: $0<x<\frac{1}{2}$.
ג. עיין סקיצה.

2) א. $\min(0,4)$, $\max\left(-\frac{1}{4},4\frac{1}{8}\right)$, $\min(-2,2)$ ב. עיין סקיצה.
ג. i. $4<k<4.5$ ii. $k=4.5$ iii. $k>4.5$ iv. $k=4$ v. $k<4$.

3) א. הוכחה.   ב. עולה: $x<2$, יורדת: $x>2$ ג. עיין סקיצה.

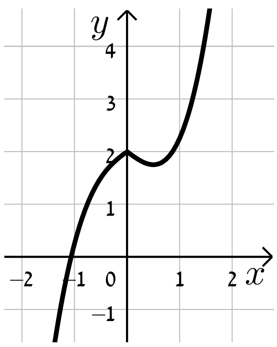
4) א. $a=-1$ ב. הוכחה.   ג. הוכחה.   ד. עיין סקיצה.   ה. עיין סקיצה.

5) א. הוכחה.   ב. $\max(\pi,2)$, $\min\left(\frac{\pi}{2},-1\right)$, $\max(0,2)$ ג. עיין סקיצה.
ד. עיין סקיצה.

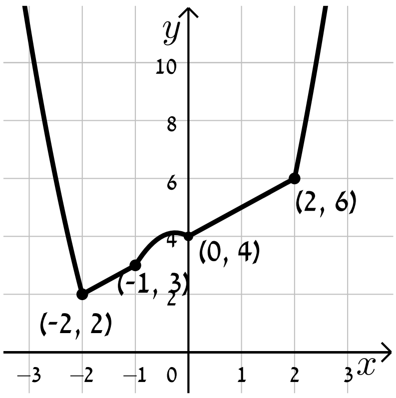
6) א. הוכחה.   ב. עיין סקיצה.   ג. עיין סקיצה.

סקיצות לשאלות החקירה:

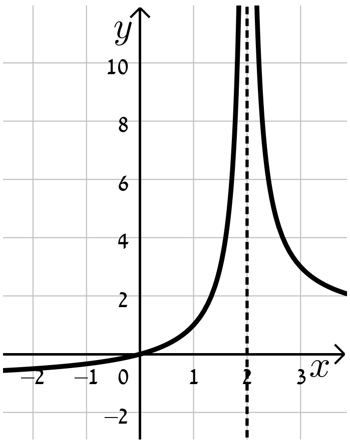
שאלה 1



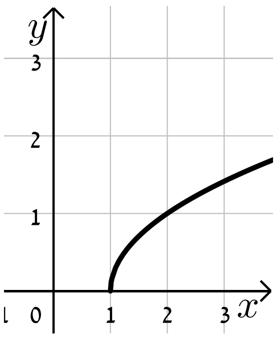
שאלה 2



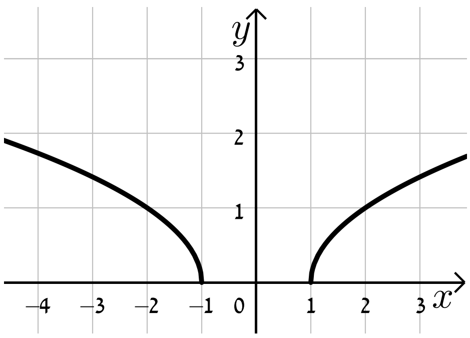
שאלה 3



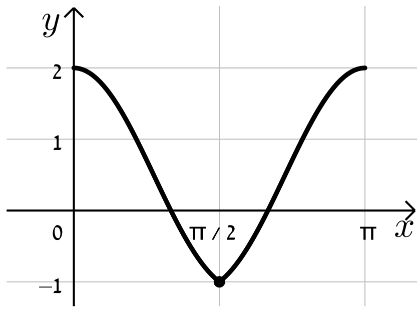
שאלה 4 סעיף ד



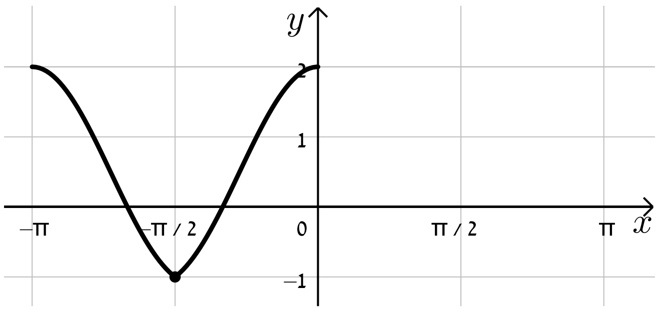
שאלה 4 סעיף ה



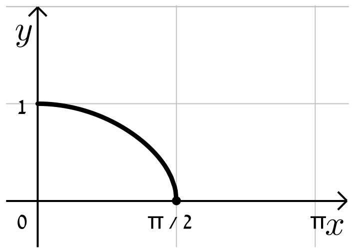
שאלה 5 סעיף ג



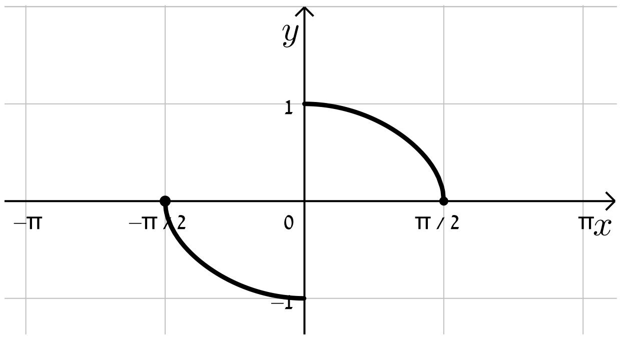
שאלה 5 סעיף ד



שאלה 6 סעיף ב



שאלה 6 סעיף ג



פתרון וחקירה של משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כדי לחקור משוואות המכילות פרמטר וביטוי/ים עם ערך מוחלט, יש להפריד את המשוואה לתתי-משוואות, לפי כל תחום של המשתנה עבורו סימן הערך המוחלט הוא חיובי או שלילי. לאחר מכן יש לפתור כל משוואה בנפרד ולאחד את הפתרונות.

שאלות:

1) עבור אילו ערכים של m יש למשוואה $\left|x^2-2x-3\right|=m-1$ שלושה פתרונות?

2) לפניך הפונקציה הבאה: $f\left(x\right)=\left|x^2-x-2\right|+x\left|x\right|$

א. צייר את גרף הפונקציה במערכת צירים.

ב. מצא עבור אלו ערכי k יש למשוואה: $\left|x^2-2x-3\right|+k=x-x\left|x\right|-1$ פתרון אחד בלבד.

3) לפניך הפונקציה הבאה: $f\left(x\right)=\frac{\left|x-3\right|}{x^2-9}+\frac{x-3}{\left|x-3\right|}$

א. סרטט את הפונקציה במערכת צירים (זכור לפשט תחילה).

ב. מצא לאלו ערכים של a יהיה למשוואה: $f\left(x\right)=a$ פתרון אחד בלבד.

4) לפניך הפונקציה: $f\left(x\right)=\left|x^2-6x+8\right|+\left|x^2-6x+5\right|$ והישר: $y=m$.

א. סרטט גרף של $f\left(x\right)$ במערכת צירים.

ב. מצא את התחומים של m עבורם לישר $y=m$ יהיו יותר משתי נקודות חיתוך שונות עם גרף הפונקציה $f\left(x\right)$.

תשובות סופיות:

1) $m=5$.

2) א. ראה סרטוט בסרטון הוידאו. ב. $k=-1$.

3) א. ראה סרטוט בסרטון הוידאו. ב. $a\ge\frac{7}{6}$, $-1<a\le1$, $a<-\frac{7}{6}$.

4) $3\le m\le5$.