

# מתמטיקה ייעודית להנדסה 4020103/4

פרק 23 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות הערך המוחלט

תוכן העניינים

1. כתיבה וסרטוט של פונקציות ערך מוחלט. 1
2. פתרון וחקירה של משוואות עם ערך מוחלט. 6
3. תחום הגדרה של פונקציות עם ערך מוחלט. 7
4. גזירה של פונקציות עם ערך מוחלט. 8
5. חקירה של פונקציות עם ערכים מוחלטים. 11

## כתיבה וסרטוט של פונקציות ערך מוחלט:

### סיכום כללי:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \text{ : פונקציה הערך המוחלט מוגדרת:}$$

כדי לסרטוט פונקציות עם ערך מוחלט, או שמכילות ביטויים עם ערכים מוחלטים, יש לעקוב אחר השלבים הבאים:

- יש למצוא את הנקודות שמאפסות את כל אחד מהערכים המוחלטים.
- יש לחלק את הפונקציה לתחומים עבור כל האפשרויות הקיימות.
- עבור כל תחום יש לכתוב את הפונקציה המתקבלת ללא סימן הערך המוחלט ולסרטוט אותה במערכת צירים.

### הערה:

ניתן להיעזר בטכניקה אלגברית בסיסית על מנת לפשט פונקציות בטרם הניתוח והסרטוט שלהן כגון:  $f(x) = x^2|x| - 3|x| = |x|(x^2 - 3)$ .

### שאלות:

(1) לפניך הפונקציה הבאה:  $f(x) = |x+4| - |4x| + 1$ . כתוב את הפונקציה ללא סימן הערך המוחלט, כפונקציה מוגדרת למקוטעין.

(2) לפניך הפונקציה הבאה:  $f(x) = 3x - |x+3-x|$ . כתוב את הפונקציה ללא סימן הערך המוחלט, כפונקציה מוגדרת למקוטעין.

סרטט את הפונקציות הבאות במערכת צירים:

$$f(x) = |x+2| \quad (4) \qquad f(x) = |x| - 1 \quad (3)$$

$$f(x) = |x-1| + |2-x| - 3 \cdot |x+1| + x \quad (6) \qquad f(x) = |2x+1| + |x-3| \quad (5)$$

$$f(x) = x|x| \quad (8) \qquad f(x) = 2|x| + x \quad (7)$$

$$f(x) = |x^2 + 6x - 8| \quad (10) \qquad f(x) = x^2 + 2|x| - 3 \quad (9)$$



$$f(x) = (x-3)|x+1| \quad (12)$$

$$f(x) = -2x|x| + |7x| - 5 \quad (11)$$

$$f(x) = x^3 - |x| \quad (14)$$

$$f(x) = |9x - x^3| \quad (13)$$

$$f(x) = 2x^2|x| - 7x|x| + 3|x| \quad (16)$$

$$f(x) = |x|^3 - 4x^2 \quad (15)$$

$$(17) \text{ לפי הפונקציה: } f(x) = 6x - 2x^2.$$

א. סרטט את  $f(x)$  במערכת צירים.

ב. סרטט באותה מערכת הצירים את  $g(x) = 6|x| - 2x^2$ .

ג. הוסף למערכת הצירים את גרף הפונקציה:  $h(x) = |6|x| - 2x^2|$ .

$$(18) \text{ לפי הפונקציה: } f(x) = 9x^2 - 8x - 1.$$

מגדירים:  $g(x) = 9x|x| - 8x - 1$  ו-  $h(x) = 9x^2 - 8|x| - 1$ .

א. סרטט במערכת צירים אחת את הפונקציות  $g(x)$  ו-  $h(x)$ .

ב. סרטט במערכת צירים חדשה את הפונקציה  $|h(x)|$ .

$$(19) \text{ נתונות הפונקציות הבאות: } f(x) = \frac{|x|}{x} \text{ ו- } g(x) = \frac{x}{|x|}.$$

האם המשוואות הנ"ל מייצגות את אותה הפונקציה?  
אם כן – הסבר וסרטט את גרף הפונקציה, אם לא – נמק.

$$(20) \text{ מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות: } f(x) = |x^2 - 4|, g(x) = |x+1| + |x-2|.$$

$$(21) \text{ לפי הפונקציות הבאות: } f(x) = |(x-2)(x+4)|, g(x) = |(x-5)(x+4)|.$$

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

ב. כיצד תשתנה התוצאה אם במקום  $g(x)$  ניקח:  $h(x) = |(x-5)(x-4)|$ ?

$$(22) \text{ נתונות הפונקציות: } f(x) = |x|x+3 \text{ ו- } g(x) = ax^2, (a \neq 0).$$

מצא עבור אלו ערכים של  $a$  הגרפים נחתכים בשתי נקודות, נקודה אחת ולא נחתכים כלל.

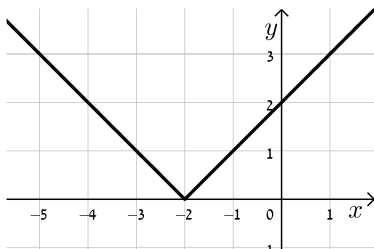
## תשובות סופיות:

$$f(x) = |x+4| - |4x| + 1 = \begin{cases} -3x+5 & x \geq 0 \\ 5x+5 & -4 \leq x < 0 \\ 3x-3 & x < -4 \end{cases} \quad (1)$$

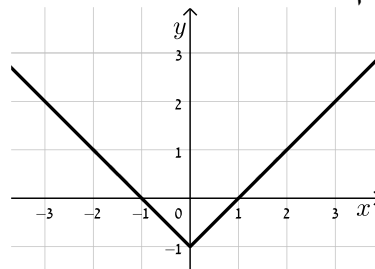
$$f(x) = 3x - |x+|3-x|| = \begin{cases} x+3 & x \geq 3 \\ 3x-3 & x < 3 \end{cases} \quad (2)$$

## להלן סקיצות של הפונקציות:

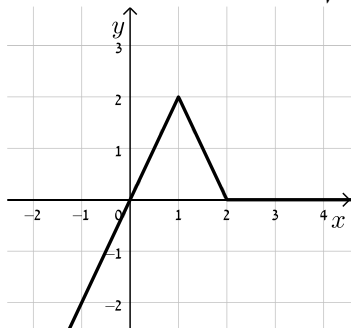
(4) סקיצה:



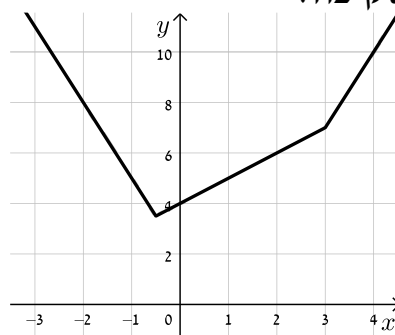
(3) סקיצה:



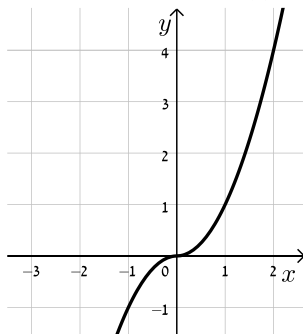
(6) סקיצה:



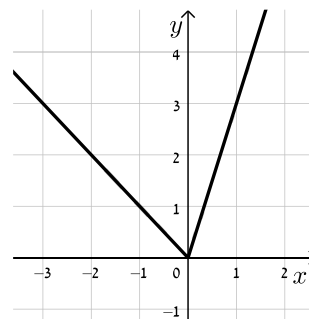
(5) סקיצה:



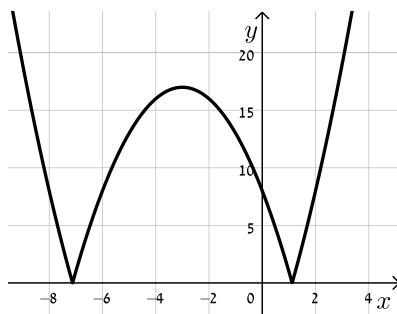
(8) סקיצה:



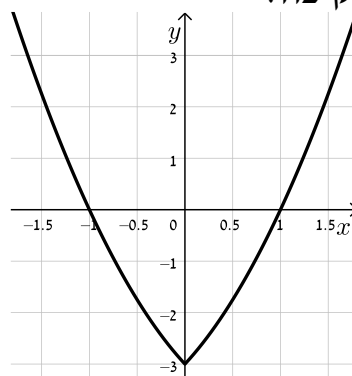
(7) סקיצה:



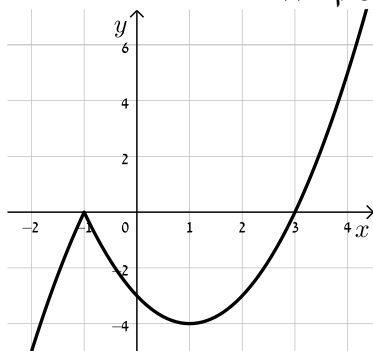
10) סקיצה:



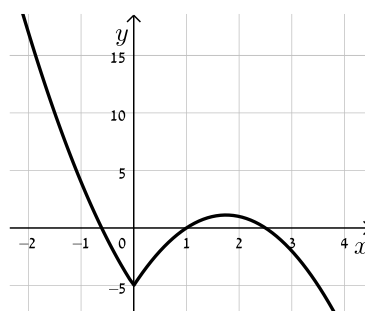
9) סקיצה:



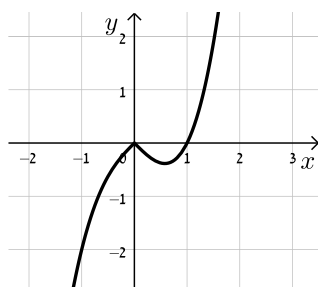
12) סקיצה:



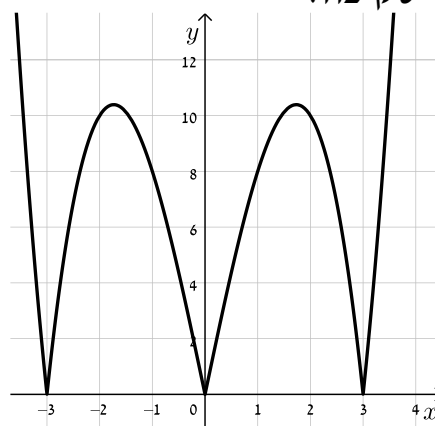
11) סקיצה:



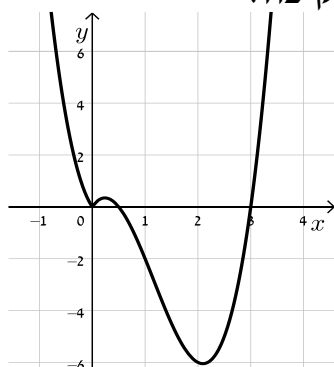
14) סקיצה:



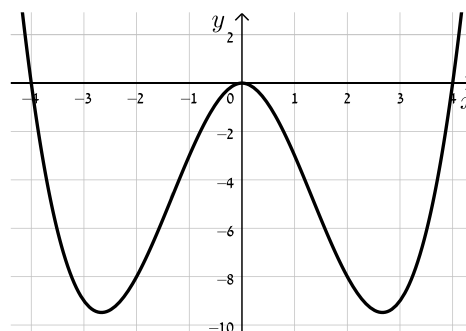
13) סקיצה:



16) סקיצה:



15) סקיצה:





- (17) פתרון מלא בסרטון הוידאו.
- (18) פתרון מלא בסרטון הוידאו.
- (19) כן, מדובר באותה הפונקציה.
- (20)  $(-3.45, 7.9)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(-1, 3)$ ,  $(1, 3)$ .
- (21) א.  $(-4, 0)$ ,  $(3.5, 11.25)$ . ב. יהיה רק פתרון אחד והוא:  $(2.55, 3.57)$ .
- (22) שני פתרונות:  $a > 1$ , פתרון יחיד:  $-1 < a < 1$  וגם  $a \neq 0$  מת.ה., אף פתרון:  $a \leq -1$ .

## פתרון וחקירה של משוואות עם ערך מוחלט:

### סיכום כללי:

כדי לחקור משוואות המכילות פרמטר וביטויים עם ערך מוחלט, יש להפריד את המשוואה לתתי-משוואות, לפי כל תחום של המשתנה עבורו סימן הערך המוחלט הוא חיובי או שלילי. לאחר מכן יש לפתור כל משוואה בנפרד ולאחד את הפתרונות.

### שאלות:

(1) עבור אילו ערכים של  $m$  יש למשוואה  $|x^2 - 2x - 3| = m - 1$  שלושה פתרונות?

(2) לפניך הפונקציה הבאה:  $f(x) = |x^2 - x - 2| + x|x|$

א. צייר את גרף הפונקציה במערכת צירים.

ב. מצא עבור אלו ערכי  $k$  יש למשוואה  $|x^2 - 2x - 3| + k = x - x|x| - 1$  פתרון אחד בלבד.

(3) לפניך הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{|x-3|}{x^2-9} + \frac{x-3}{|x-3|}$

א. סרטט את הפונקציה במערכת צירים (זכור לפשט תחילה).

ב. מצא לאלו ערכים של  $a$  יהיה למשוואה  $f(x) = a$  פתרון אחד בלבד.

(4) לפניך הפונקציה:  $f(x) = |x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5|$  והישר:  $y = m$ .

א. סרטט גרף של  $f(x)$  במערכת צירים.

ב. מצא את התחומים של  $m$  עבורם לישר  $y = m$  יהיו יותר משתי נקודות

חיתוך שונות עם גרף הפונקציה  $f(x)$ .

### תשובות סופיות:

(1)  $m = 5$ .

(2) א. ראה סרטוט בסרטון הוידאו. ב.  $k = -1$ .

(3) א. ראה סרטוט בסרטון הוידאו. ב.  $a < -\frac{7}{6}$ ,  $-1 < a \leq 1$ ,  $a \geq \frac{7}{6}$ .

(4)  $3 \leq m \leq 5$ .

## תחום הגדרה של פונקציות עם ערך מוחלט:

### סיכום כללי:

כדי למצוא תחום הגדרה של פונקציה עם ערך מוחלט יש לוודא כי הערכים של המשתנה לא יוצרים ביטויים חסרי משמעות (כגון חלוקה באפס, או ערך שלילי בתוך שורש ממעלה זוגית).

### שאלות:

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{|3-x|}{x-1} \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt{|x|-2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3}{2|\sin x|-1} \quad (6)$$

$$f(x) = |x^2 - 1| + x + 3 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{|x|-4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{|2x+1|-3}{\sqrt{4-|x|}} \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{כל } x$$

$$(2) \quad x \neq 1$$

$$(3) \quad x \neq 0, \pm 4$$

$$(4) \quad x \geq 2, x \leq -2$$

$$(5) \quad -4 < x < 4$$

$$(6) \quad x \neq \frac{\pi}{6} + \pi k, x \neq \frac{5\pi}{6} + \pi k$$

## גזירה של פונקציות עם ערך מוחלט:

### סיכום כללי:

נגזרת של פונקציות הערך המוחלט:  $f(x) = |x|$  היא:  $f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

עבור פונקציה פנימית  $f(x) = |g(x)|$  נעזר בכלל השרשרת:  $f'(x) = \begin{cases} g(x) & g(x) > 0 \\ -g(x) & g(x) < 0 \end{cases}$

### הערה:

נסמן נקודת אפס של ביטוי עם ערך מוחלט ב- $x_0$  ונאמר כי אם ערך הנגזרת מימין ומשלא לנקודה זהה אז הפונקציה גזירה בנקודה  $x_0$ , אחרת היא אינה גזירה בנקודה זו.

### דוגמא:

לפונקציה:  $f(x) = |x|$  יש נקודת אפס  $x_0 = 0$  והנגזרת:  $f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

ערך הנגזרת הימני הוא  $f'(x=0^+) = 1$  והשמאלי הוא  $f'(x=0^-) = -1$ .

היות ו- $f'(x=0^+) \neq f'(x=0^-)$  נאמר כי הפונקציה אינה גזירה ב- $(0,0)$ .

### שאלות:

גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = x^3 + \frac{2}{3}|x| + 1 \quad (2)$$

$$f(x) = |x^2 - 3x + 2| \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{|x| + 2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{|x|}{x-1} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{5-x}{\sqrt{|x|+6}} \quad (6)$$

$$f(x) = \sqrt{3x - |3-x|} \quad (5)$$

$$f(x) = \sqrt{3|x| - \cos x} + 1 \quad (8)$$

$$f(x) = \sin|x| \quad (7)$$



9 מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = x \cdot |x+2| + 3$  בנקודות:

א.  $x = -3$

ב.  $y = 3$

10 לפניך הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x+|x|}{x+1}$ .

א. הוכח כי הפונקציה מקיימת:  $0 \leq f(x) < 2$  לכל  $x$  בתחום הגדרתה.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = 3$ .

11 לפניך הפונקציה:  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{|2x+1|+x^2}}$ .

א. הראה כי הפונקציה מוגדרת לכל  $x$ .

ב. מצא את הערך המירבי של הפונקציה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר בנקודת החיתוך

של הישר  $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$  וגרף הפונקציה ברביע השני.

### תשובות סופיות:

1  $f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & x < 1, x > 2 \\ -2x+3 & 1 < x < 2 \end{cases}$ , בנקודות  $(1,0)$ ,  $(2,0)$  הנגזרת לא קיימת.

2  $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + \frac{2}{3} & x > 0 \\ 3x^2 - \frac{2}{3} & x < 0 \end{cases}$ , בנקודה  $(0,1)$  הנגזרת לא קיימת.

3  $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & x > 0, x \neq 1 \\ \frac{1}{(x-1)^2} & x < 0 \end{cases}$ , בנקודה  $(0,0)$  הנגזרת לא קיימת.

4  $f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2} & x > 0 \\ -\frac{x^2+4x+1}{(-x+2)^2} & x < 0 \end{cases}$ , בנקודה  $(0, \frac{1}{2})$  הנגזרת לא קיימת.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4x-3}} & \frac{3}{4} < x < 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2x+3}} & x > 3 \end{cases} \quad (5)$$

בנקודה (3,3) הנגזרת לא קיימת.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x-17}{2(\sqrt{x+6})^3} & x > 0 \\ \frac{-x-7}{2(\sqrt{-x+6})^3} & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

בנקודה  $(0, \frac{5}{\sqrt{6}})$  הנגזרת לא קיימת.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & x > 0 \\ -\cos x & x < 0 \end{cases} \quad (7)$$

בנקודה (0,0) הנגזרת לא קיימת.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3+\sin x}{2\sqrt{3x-\cos x+1}} & x > 0 \\ \frac{-3+\sin x}{2\sqrt{-3x-\cos x+1}} & x < 0 \end{cases} \quad (8)$$

בנקודה (0,0) הנגזרת לא קיימת.

(9) א.  $y = 4x + 12$  ב. הפונקציה גזירה רק בנקודה (0,3) ולכן נמצא את

משוואת המשיק רק שם ונקבל:  $y = 2x + 3$ .

(10) א. הוכחה. ב.  $y = \frac{1}{8}x + 1\frac{1}{8}$ .

(11) א. הוכחה. ב. 6. ג.  $y = \frac{3}{\sqrt{2}}x + 3\sqrt{2}$ .

## חקירה של פונקציות עם ערכים מוחלטים:

### סיכום כללי:

כדי לחקור פונקציה שמכילה ביטויים עם ערכים מוחלטים נבצע את פעולות החקירה הרגילות תוך תשומת לב לחלוקת הפונקציה למקטעים לפי ערכי המשתנה המאפסים את הערכים המוחלטים.

- מציאת תחום הגדרה של פונקציה.
- גזירה של פונקציה, מציאת נקודות אי-גזירות, וקביעת סוג הקיצון.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת אסימפטוטות של גרף הפונקציה (במידה וישנן).
- מציאת נקודות פיתול ותחומי קמירות כלפי מעלה ומטה (במידה ונשאלים).
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה תוך הקפדה על נקודות אי רציפות, נקודות אי-גזירות וסימון מקטעים שונים על הגרף לפי המתבקש.

### שאלות:

(1) לפניך הפונקציה:  $f(x) = x^3 - \frac{3}{4}|x| + 2$ .

- א. מה הן נקודות הקיצון של הפונקציה?
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) נתונה הפונקציה:  $f(x) = |x^2 - 4| + |x^2 + x|$ .

- א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ב. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ג. נתון הישר  $y = x + k$ , פרמטר  $k$  מצא לאלו ערכים של  $k$ :
  - i. הישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות.
  - ii. הישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-3 נקודות שונות.
  - iii. הישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-2 נקודות שונות.
  - iv. הישר יחתוך את גרף הפונקציה באינסוף נקודות.
  - v. הישר לא יחתוך את גרף הפונקציה כלל.



$$(3) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{x}{|x-2|}$$

- א. כתוב את הנגזרת של הפונקציה והוכח כי אין לפונקציה נקודות קיצון.  
 ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
 ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(4) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \sqrt{|x|+a}, \quad a \text{ פרמטר.}$$

- ידוע כי הפונקציה אינה מוגדרת בתחום:  $-1 < x < 1$ .  
 א. מצא את  $a$ .  
 ב. הוכח כי הפונקציה היא זוגית.  
 ג. הראה כי הפונקציה עולה בתחום:  $x > 1$ .  
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום  $0 < x < 9$ .  
 ה. היעזר בממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שצירת את גרף הפונקציה בתחום:  $-9 < x < 0$ .

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = |\cos x| + \cos 2x$$

- א. הוכח כי הפונקציה היא זוגית.  
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום  $[0: \pi]$  וקבע את סוגן.  
 ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום:  $[0: \pi]$ .  
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום:  $[-\pi: 0]$ .

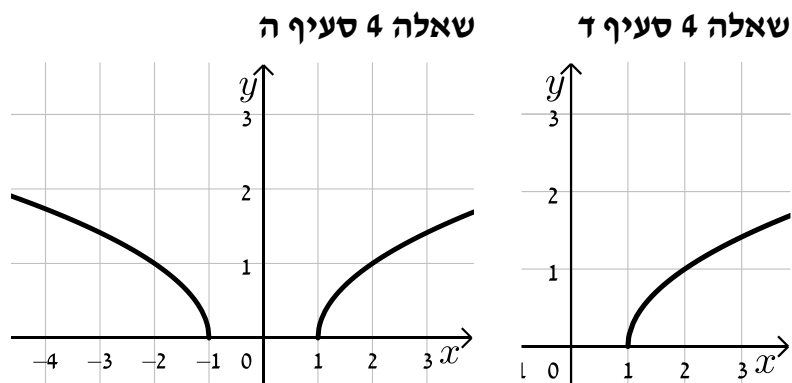
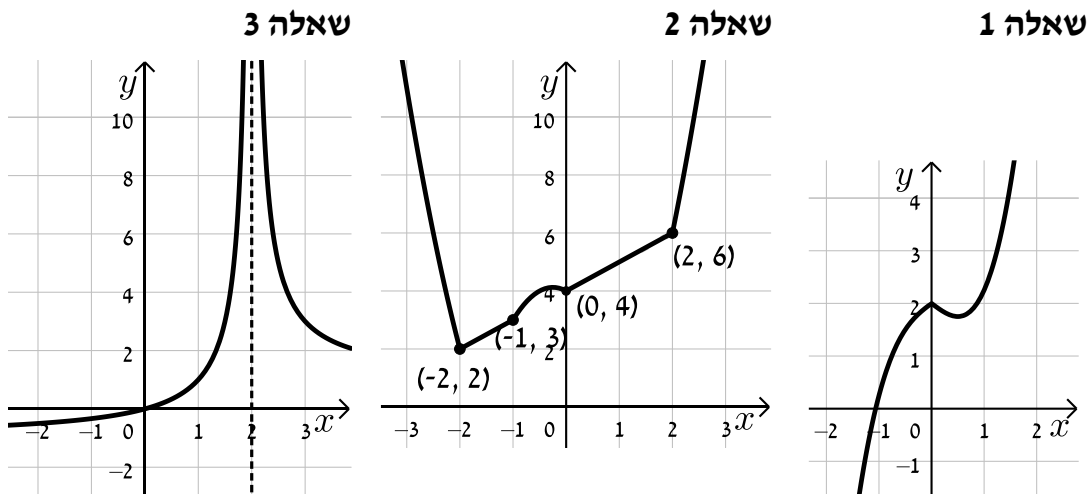
$$(6) \quad \text{נתונות שתי פונקציות: } f(x) = \sqrt{\cos x}, \quad g(x) = \frac{x}{|x|}$$

- א. הוכח כי  $f(x)$  הינה פונקציה זוגית וכי  $g(x)$  הינה פונקציה אי-זוגית.  
 ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .  
 ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה:  $f(x) \cdot g(x)$  בתחום:  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

**תשובות סופיות:**

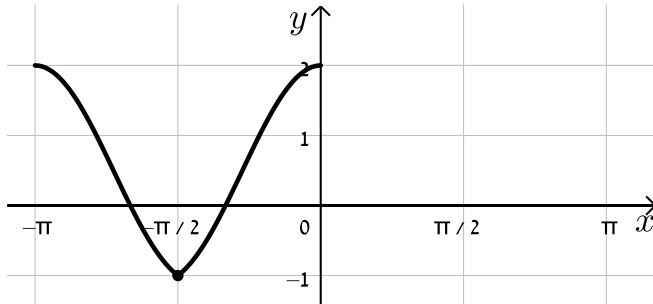
- (1) א.  $\max(0, 2)$ ,  $\min\left(\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}\right)$  ב. עולה:  $x > \frac{1}{2}$ ,  $x < 0$ , יורדת:  $0 < x < \frac{1}{2}$ . ג. עיין סקיצה.
- (2) א.  $\min(-2, 2)$ ,  $\max\left(-\frac{1}{4}, 4\frac{1}{8}\right)$ ,  $\min(0, 4)$  ב. עיין סקיצה.
- ג.  $4 < k < 4.5$  ii  $k = 4.5$  iii  $k > 4.5$  iv  $k = 4$  v  $k < 4$
- (3) א. הוכחה. ב. עולה:  $x < 2$ , יורדת:  $x > 2$  ג. עיין סקיצה.
- (4) א.  $a = -1$  ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. עיין סקיצה. ה. עיין סקיצה.
- (5) א. הוכחה. ב.  $\max(0, 2)$ ,  $\min\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$ ,  $\max(\pi, 2)$  ג. עיין סקיצה.
- ד. עיין סקיצה.
- (6) א. הוכחה. ב. עיין סקיצה. ג. עיין סקיצה.

**סקיצות לשאלות החקירה:**

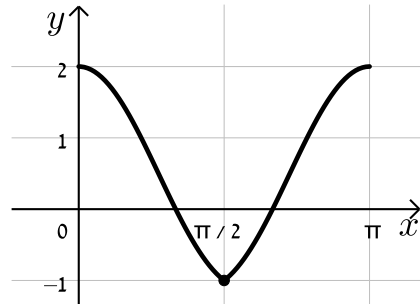




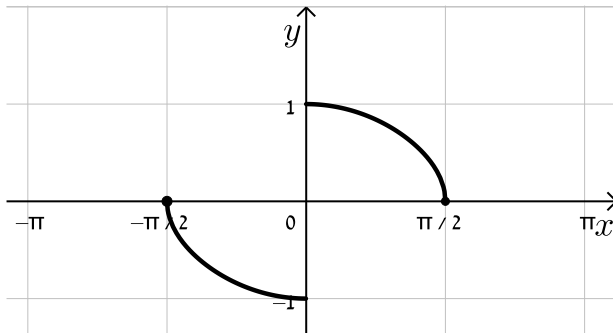
שאלה 5 סעיף ד



שאלה 5 סעיף ג



שאלה 6 סעיף ג



שאלה 6 סעיף ב

