

מכינה במתמטיקה

פרק 20 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות

תוכן העניינים

1. הנגזרת של פונקציה לוגריתמית..... 1
2. שימושי הנגזרת..... 6

הנגזרת של פונקציה לוגריתמית:

סיכום כללי:

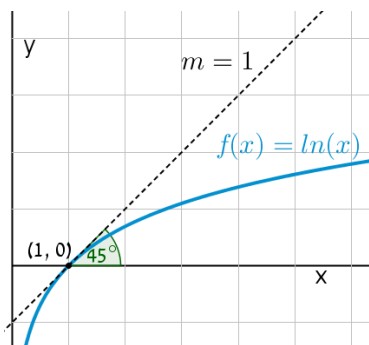
הגדרות כלליות:



להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית כללית מהצורה: $f(x) = \log_a x$ עבור $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:

תכונות כלליות:

- לפונקציות תחום הגדרה $x > 0$.
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- x בנקודה $(1, 0)$.
- עבור $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.



עבור הפונקציות $f(x) = \ln x = \log_e x$ נקבל כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x הוא 1:

תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה: $y = \log(f(x))$ הוא: $f(x) > 0$.

נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

הנגזרת	הפונקציה
$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$y = \log_a x$
$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$	$y = \log_a f(x)$
$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln x$
$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$y = \ln f(x)$

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א. $f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1)$ ב. $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ ד. $f(x) = \ln(e^x + 1)$

ה. $f(x) = \ln(\cos x)$ ו. $f(x) = \log_2 x + 5 \log_3(2x-1)$

2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א. $f(x) = x \ln x$ ב. $f(x) = (3x+1)^2 \ln x$ ג. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ד. $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$ ה. $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

3) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א. $f(x) = \ln^3 x$ ב. $f(x) = 3 \ln^2 x$

ג. $f(x) = x^2 \ln^2 x$ ד. $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

4) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|
| א. $f(x) = \ln(x+2)$ | ב. $f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3$ |
| ג. $f(x) = x^2 \ln x$ | ד. $f(x) = x^3 \ln x$ |
| ה. $f(x) = \ln e^{2x}$ | ו. $f(x) = e^x \ln x$ |
| ז. $f(x) = e^{-x^2} \ln x$ | ח. $f(x) = x^2(2 \ln x - 1)$ |
| ט. $f(x) = \ln(x^2)$ | י. $f(x) = \ln(x^4)$ |
| יא. $f(x) = (\ln x)^4$ | יב. $f(x) = x \ln x - \ln x^2$ |
| יג. $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ | יד. $f(x) = \ln \sqrt{x}$ |
| טו. $f(x) = \sqrt{\ln x}$ | טז. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ |

5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות אתגר):

- | | |
|--|--|
| א. $f(x) = \ln \frac{x+2}{x}$ | ב. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$ |
| ג. $f(x) = \ln \frac{x-3}{x+3}$ | ד. $f(x) = \ln \frac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$ |
| ה. $f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 1}$ | ו. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ |
| ז. $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$ | ח. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$ |
| ט. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ | י. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+5x}{1-5x}}$ |
| יא. $f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{x}$ | יב. $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x}$ |
| יג. $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$ | יד. $f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x}$ |
| טו. $f(x) = \frac{x}{\ln^4 x}$ | |

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll}
 f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} \cdot \lambda & f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x} \cdot \text{ב} & f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1} \cdot \text{א} \quad (1) \\
 f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3} \cdot \text{ו} & f'(x) = -\tan x \cdot \text{ה} & f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \cdot \text{ז} \\
 f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \cdot \lambda & f'(x) = (3x+1) \left(6 \ln x + \frac{3x+1}{x} \right) \cdot \text{ב} & f'(x) = \ln x + 1 \cdot \text{א} \quad (2) \\
 & f'(x) = \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x+x}} \cdot \text{ה} & f'(x) = \frac{4}{x(\ln x+2)^2} \cdot \text{ז} \\
 f'(x) = 2x \ln x (\ln x + 1) \cdot \lambda & f'(x) = \frac{6 \ln x}{x} \cdot \text{ב} & f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x} \cdot \text{א} \quad (3) \\
 & & f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3} \cdot \text{ז} \\
 x(2 \ln x + 1) \cdot \lambda & \frac{2 \ln x + 2}{x} \cdot \text{ב} & \frac{1}{x+2} \cdot \text{א} \quad (4) \\
 e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \cdot \text{ו} & 2 \cdot \text{ה} & x^2 (3 \ln x + 1) \cdot \text{ז} \\
 \frac{4}{x} \cdot \text{ד} & 4x \ln x \cdot \text{ח} & e^{-x^2} \left(\frac{1}{x} - 2x \ln x \right) \cdot \text{י} \\
 \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2} \cdot \text{ג} & \ln x + 1 - \frac{2}{x} \cdot \text{ב} & \frac{4(\ln x)^3}{x} \cdot \text{א} \\
 \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} \cdot \text{ט} & \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} \cdot \text{ט} & \frac{1}{2x} \cdot \text{ז} \\
 \frac{6}{x^2-9} \cdot \lambda & \frac{2}{x^2-1} \cdot \text{ב} & -\frac{2}{x(x+2)} \cdot \text{א} \quad (5) \\
 \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{x\sqrt{x^2+a^2}+x^2+a^2} \cdot \text{ו} & \frac{x}{x^2-1} \cdot \text{ה} & \frac{3}{x-5} - \frac{2}{x+1} \cdot \text{ז} \\
 \frac{1}{x^2-1} \cdot \text{ט} & \frac{1}{4-2x} \cdot \text{ח} & \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}} \cdot \text{י}
 \end{array}$$

$$\frac{3\ln^2 x - \ln^3 x}{x^2} \quad \text{י.ב.}$$

$$\frac{\ln x - 4}{\ln^5 x} \quad \text{ט.ו.}$$

$$\frac{1 - 3\ln \sqrt[3]{x}}{3x^2} \quad \text{י.א.}$$

$$\frac{2(\ln^4 x - 1)}{x \ln^3 x} \quad \text{י.ד.}$$

$$\frac{5}{1 - 25x^2} \quad \text{י.י.}$$

$$\frac{\ln(x^2) - 2}{\ln^2(x^2)} \quad \text{י.ג.}$$

שימושי הנגזרת:

שאלות:

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $A(e, 1)$.

(7) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$ בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ הוא $\frac{e}{3}$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

(8) הגרפים של הפונקציות $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = 1 - x$ נחתכים בנקודה A ברביע הראשון.
בנקודה A העבירו משיק ל- $f(x)$.
מצא את משוואת המשיק והוכח שמשיק זה עובר דרך הראשית.

(9) לפונקציה $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x = e^2$.
מצא את משוואת המשיק.

(10) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = x \ln(x^2 + 1)$ בנקודה שבה $x = 1$.

תשובות סופיות:

(6) $y = \frac{1}{e}x$

(7) $a = 2, b = -2$

(8) $y = \frac{1}{e}x$

(9) $y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2}$

(10) $y = \ln 2 \cdot x + x - 1$