

# מכינה במתמטיקה

פרק 43 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות

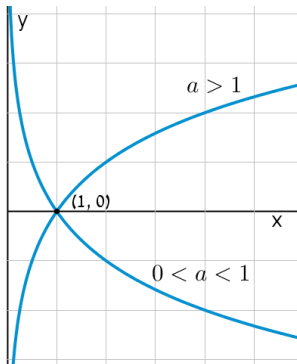
תוכן העניינים

1. הנגזרת של פונקציה לוגריתמית.....1
2. שימושי הנגזרת.....6
3. חקירה של פונקציה לוגריתמית.....7

## הנגזרת של פונקציה לוגריתמית:

### סיכום כללי:

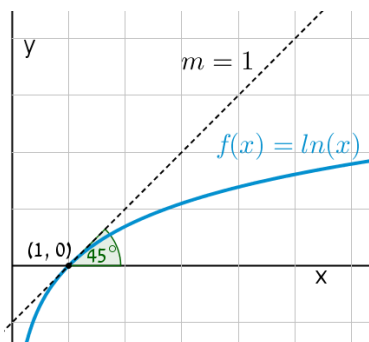
#### הגדרות כלליות:



להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית כללית מהצורה:  $f(x) = \log_a x$  עבור  $a > 1$  ו-  $0 < a < 1$ :

#### תכונות כלליות:

- לפונקציות תחום הגדרה  $x > 0$ .
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- $x$  בנקודה  $(1, 0)$ .
- עבור  $a > 1$  הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור  $0 < a < 1$  הפונקציה יורדת בכל ת.ה.



עבור הפונקציות  $f(x) = \ln x = \log_e x$  נקבל כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  הוא 1:

#### תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה:  $y = \log(f(x))$  הוא:  $f(x) > 0$ .

## נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

| הפונקציה          | הנגזרת                          |
|-------------------|---------------------------------|
| $y = \log_a x$    | $y' = \frac{1}{x \ln a}$        |
| $y = \log_a f(x)$ | $y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$ |
| $y = \ln x$       | $y' = \frac{1}{x}$              |
| $y = \ln f(x)$    | $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$       |

## שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א.  $f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1)$     ב.  $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג.  $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$     ד.  $f(x) = \ln(e^x + 1)$

ה.  $f(x) = \ln(\cos x)$     ו.  $f(x) = \log_2 x + 5 \log_3(2x-1)$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א.  $f(x) = x \ln x$     ב.  $f(x) = (3x+1)^2 \ln x$     ג.  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ד.  $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$     ה.  $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א.  $f(x) = \ln^3 x$     ב.  $f(x) = 3 \ln^2 x$

ג.  $f(x) = x^2 \ln^2 x$     ד.  $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

(4) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

ב.  $f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3$

א.  $f(x) = \ln(x+2)$

ד.  $f(x) = x^3 \ln x$

ג.  $f(x) = x^2 \ln x$

ו.  $f(x) = e^x \ln x$

ה.  $f(x) = \ln e^{2x}$

ח.  $f(x) = x^2(2 \ln x - 1)$

ז.  $f(x) = e^{-x^2} \ln x$

י.  $f(x) = \ln(x^4)$

ט.  $f(x) = \ln(x^2)$

יב.  $f(x) = x \ln x - \ln x^2$

יא.  $f(x) = (\ln x)^4$

יד.  $f(x) = \ln \sqrt{x}$

יג.  $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$

טז.  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

טו.  $f(x) = \sqrt{\ln x}$

(5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות אתגר):

ב.  $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$

א.  $f(x) = \ln \frac{x+2}{x}$

ד.  $f(x) = \ln \frac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$

ג.  $f(x) = \ln \frac{x-3}{x+3}$

ו.  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$

ה.  $f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 1}$

ח.  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$

ז.  $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$

י.  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+5x}{1-5x}}$

ט.  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

יב.  $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x}$

יא.  $f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{x}$

יד.  $f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x}$

יג.  $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$

טו.  $f(x) = \frac{x}{\ln^4 x}$

## תשובות סופיות:

(1) א.  $f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1}$  ב.  $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x}$  ג.  $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$

ד.  $f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$  ה.  $f'(x) = -\tan x$  ו.  $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3}$

(2) א.  $f'(x) = \ln x + 1$  ב.  $f'(x) = (3x+1) \left( 6 \ln x + \frac{3x+1}{x} \right)$  ג.  $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

ד.  $f'(x) = \frac{4}{x(\ln x + 2)^2}$  ה.  $f'(x) = \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x + x}}$

(3) א.  $f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x}$  ב.  $f'(x) = \frac{6 \ln x}{x}$  ג.  $f'(x) = 2x \ln x (\ln x + 1)$

ד.  $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3}$  ה. 2

(4) א.  $\frac{1}{x+2}$  ב.  $\frac{2 \ln x + 2}{x}$  ג.  $x(2 \ln x + 1)$

ד.  $x^2(3 \ln x + 1)$  ה.  $e^x \left( \ln x + \frac{1}{x} \right)$  ו.  $\frac{4}{x}$

ז.  $e^{-x^2} \left( \frac{1}{x} - 2x \ln x \right)$  ח.  $4x \ln x$  ט.  $\frac{2}{x}$

י.  $\frac{4(\ln x)^3}{x}$  יא.  $\ln x + 1 - \frac{2}{x}$  יב.  $\frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2}$

יג.  $\frac{1}{2x}$  יד.  $\frac{1}{2x}$  יו.  $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$  יז.  $\frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$

(5) א.  $-\frac{2}{x(x+2)}$  ב.  $\frac{2}{x^2-1}$  ג.  $\frac{6}{x^2-9}$

ד.  $\frac{3}{x-5} - \frac{2}{x+1}$  ה.  $\frac{x}{x^2-1}$  ו.  $\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{x\sqrt{x^2+a^2}+x^2+a^2}$

ז.  $\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$  ח.  $\frac{1}{4-2x}$  ט.  $\frac{1}{x^2-1}$

$$\frac{3\ln^2 x - \ln^3 x}{x^2} \quad \text{י.ב.}$$

$$\frac{\ln x - 4}{\ln^5 x} \quad \text{ט.ו.}$$

$$\frac{1 - 3\ln \sqrt[3]{x}}{3x^2} \quad \text{י.א.}$$

$$\frac{2(\ln^4 x - 1)}{x \ln^3 x} \quad \text{י.ד.}$$

$$\frac{5}{1 - 25x^2} \quad \text{י.}$$

$$\frac{\ln(x^2) - 2}{\ln^2(x^2)} \quad \text{י.ג.}$$

## שימושי הנגזרת:

### שאלות:

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \ln x$  בנקודה  $A(e, 1)$ .

(7) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$  בנקודה  $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$  הוא  $\frac{e}{3}$ .  
מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

(8) הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \ln x$  ו- $g(x) = 1 - f(x)$  נחתכים בנקודה  $A$  ברביע הראשון.  
בנקודה  $A$  העבירו משיק ל- $f(x)$ .  
מצא את משוואת המשיק והוכח שמשיק זה עובר דרך הראשית.

(9) לפונקציה  $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$  העבירו משיק בנקודה שבה  $x = e^2$ .  
מצא את משוואת המשיק.

(10) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $y = x \ln(x^2 + 1)$  בנקודה שבה  $x = 1$ .

### תשובות סופיות:

$$(6) \quad y = \frac{1}{e}x$$

$$(7) \quad a = 2, b = -2$$

$$(8) \quad y = \frac{1}{e}x$$

$$(9) \quad y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2}$$

$$(10) \quad y = \ln 2 \cdot x + x - 1$$

## חקירה של פונקציה לוגריתמית:

### שאלות:

11) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

- א.  $f(x) = \ln x$       ב.  $f(x) = \ln(x^2)$   
 ג.  $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$       ד.  $f(x) = \ln(e^x - 4)$   
 ה.  $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$       ו.  $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$   
 ז.  $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

12) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = 2 \ln x - x^2$ .

13) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^2 \ln x$ .

14) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\sqrt{2 \ln x - 1}}{x}$ .

15) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$ .

16) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a \ln x + b}{x}$ . הנקודה  $\left(e^2, \frac{1}{e^2}\right)$  היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

17) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a \ln^2 x + b \ln x}{(\ln x + 1)^2}$ . הנקודה  $\left(\sqrt[3]{e}, -\frac{1}{8}\right)$  היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

18) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \ln(x-3)$ .

19) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$ .

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{2 \ln x - 1}{\ln x + 1}$ .

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x - 4}$ .

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln^2 x + 1}$ .

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = x \ln x + 2$ .

(25) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ . מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

(26) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

- i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ii. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- iv. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

א.  $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3 \ln x$       ב.  $y = x \ln x$

ג.  $y = x \ln x - x$       ד.  $y = \sqrt{x} \ln x$

ה.  $y = x^2 \ln x$       ו.  $y = \ln(x^2 + 1)$

(27) נתונה הפונקציה  $f(x) = 2x \ln^2 x$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(28) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא לאלו ערכי  $k$  הישר  $y = k$  חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

(29) נתונה הפונקציה  $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\ln x}$ .

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \ln x$ .
- מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$ . ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור  $x$ ,  $(x_A = x_B)$ .
- מצא את שיעור ה- $x$  של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

**(31)** נתונה שתי הפונקציות הבאות:  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ,  $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

- א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.  
 נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.
- לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
  - לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור  $x$  זהה.
  - לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.
  - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.
- ב. בחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה- $x$  שלהן זהה. הוכח כי מכפלת שיעורי ה- $y$  של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

**(32)** נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \ln(x^2 - 6x - 7)$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- $y$ ?  
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



**(33)** נתונה הפונקציה:  $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- $y$ ?  
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

34) לפינך הפונקציה הבאה :  $f(x) = \ln(1 - \ln x)$  .

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

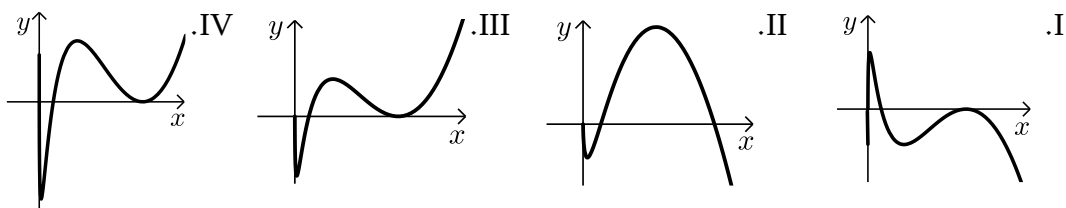
35) נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \ln \frac{2x+1}{x-1}$  .

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  .
- הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

36) נתונה הפונקציה הבאה :  $f(x) = x(\ln^3 x + 2\ln^2 x)$  .

- הראה כי נגזרת הפונקציה היא :  $f'(x) = \ln^3 x + 5\ln^2 x + 4\ln x$  .
- מצא את התחום בו הפונקציה עולה.
- ענה על השאלות הבאות :
  - מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$  .
  - מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.

ד. לפינך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה  $f(x)$  ונמק את בחירתך.



37) נתונה הפונקציה :  $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x$  .

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$  .
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הפונקציה  $g(x) = \ln x$  .

(38) ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה הבאה :  $\ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e}) = \ln 2 - 0.5$

נתונה הפונקציה :  $f(x) = \ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e})$

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה :  $x=e$ .

(39) נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \frac{x+a}{\ln(x+a)}$  ,  $a$  פרמטר חיובי,  $a \neq 1$

א. הבע באמצעות  $a$  את :

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. הנקודה המקיימת  $y' = 0$ .

iii. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום :  $x > e-2$ . מצא את  $a$ .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום  $x > -1$ .

ד. נתון הישר :  $y = k$ . מצא בסקיצה את תחום הערכים של  $k$  עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

(40) נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \ln x + \frac{1}{x}$

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ii. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר  $y$ ?

אם כן מצא אותה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

## תשובות סופיות:

$$(11) \quad \text{א. } x > 0 \quad \text{ב. } x \neq 0 \quad \text{ג. } x > 10 \text{ או } x < -2 \quad \text{ד. } x > \ln 4$$

$$\text{ה. } 0 < x \neq e \quad \text{ו. } x > 0 \text{ וגם } x \neq e^3, e^{-1} \quad \text{ז. } x \geq e$$

$$(12) \quad \max(1, -1)$$

$$(13) \quad \min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$$

$$(14) \quad \min(\sqrt{e}, 0) \text{ קצה, } \max\left(e, \frac{1}{e}\right)$$

$$(15) \quad \min(4, -1)$$

$$(16) \quad a = 1, b = -1$$

$$(17) \quad a = 1, b = -1$$

$$(18) \quad x = 3$$

$$(19) \quad \text{נקודת אי הגדרה } (0, 0), x = e, y = 0$$

$$(20) \quad \text{נקודת אי הגדרה } (0, 2), x = \frac{1}{e}, y = 2$$

$$(21) \quad \text{נקודת אי הגדרה } \left(e^2, \frac{1}{4}\right), (0, 0); x = \frac{1}{e^2}, y = 0$$

$$(22) \quad x = 0, y = 0$$

$$(23) \quad \text{נקודת אי הגדרה } (0, 0)$$

$$(24) \quad \text{נקודת אי הגדרה } (0, 2)$$

$$(25) \quad \left(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$$

$$(26) \quad \text{א. i. } x > 0 \quad \text{iii. } \max(1, -3.5), \min(3, \ln 27 - 7.5)$$

$$\text{iv. עולה: } 0 < x < 1, x > 3 \text{ יורדת: } 1 < x < 3 \quad \text{ב. i. } x > 0 \quad \text{ii. } (1, 0)$$

$$\text{iii. } \min(e^{-1}, -e^{-1}) \quad \text{iv. עולה: } x > e^{-1} \text{ יורדת: } 0 < x < e^{-1}$$

$$\text{ג. i. } x > 0 \quad \text{ii. } (e, 0) \quad \text{iii. } \min(1, -1) \quad \text{iv. עולה: } x > 1 \text{ יורדת: } 0 < x < 1$$

$$\text{ד. i. } x > 0 \quad \text{ii. } (1, 0) \quad \text{iii. } \min\left(e^{-2}, -\frac{2}{e}\right) \quad \text{iv. עולה: } x > e^{-2} \text{ יורדת: } 0 < x < e^{-2}$$

ה. i.  $x > 0$  ii.  $(1, 0)$  iii.  $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$  iv. עולה:  $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$  יורדת:  $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$

ו. i. כל  $x$  ii.  $(0, 0)$  iii.  $\min(0, 0)$  iv. עולה:  $x > 0$  יורדת:  $x < 0$

(27) א.  $x > 0$  ב.  $\max\left(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e^2}\right), \min(1, 0)$

ג. עלייה:  $x > 1$  או  $0 < x < \frac{1}{e^2}$ , ירידה:  $\frac{1}{e^2} < x < 1$  ד.  $(1, 0)$

(28) א.  $0 < x \neq e$  ב.  $\min(e^2, e^2)$  ג. עלייה:  $x > e^2$ , ירידה:  $0 < x < e^2$

ו.  $k > e^2$  ד. אין

(29) א.  $x > 0$  ב.  $\min(4, -1)$  ג. עלייה:  $x > 4$ , ירידה:  $0 < x < 4$

ד.  $(1, 0)$ ,  $(16, 0)$

(30) א.  $x \geq 1$  ב. מתקבל:  $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} > 0$  ג.  $(e, 1)$ ,  $(1, 0)$

ד.  $x = \sqrt[4]{e}$

(31) א. i. לא נכון. תחום ההגדרה של  $f(x)$  הוא:  $x > 0, x \neq 1$  ותחום ההגדרה של  $g(x)$  הוא:  $x > 0$

ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה  $x = e$  אך עבור  $f(x)$  מדובר במינימום ועבור  $g(x)$  מדובר במקסימום.

iii. לא נכון. עבור  $f(x)$ : עולה:  $x > e$  יורדת:  $0 < x < e, x \neq 1$

ועבור  $g(x)$ : עולה:  $0 < x < e$  יורדת:  $x > e$  iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה- $y$  שלה הוא:  $y = \frac{x}{\ln x}$  ו- $y = \frac{\ln x}{x}$

נכפול:  $y = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 1$

(32) א.  $x < -1, x > 7$  ב.  $x = -1, 7$  ג. עולה:  $x > 7$  יורדת:  $x < -1$

ד. III. הסבר: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום. באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

(33) א.  $x \neq -1$  ב.  $x = -1$  ג. עולה:  $x > -1$  יורדת:  $x < -1$

ד. I. הסבר: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.

באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה.  $x \neq -1, -2 < x < 0$

(34) א.  $0 < x < e$ . (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם:  $1 - \ln x > 0$  וגם  $x > 0$ ).

ב.  $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \ln x} = -\frac{1}{x(1 - \ln x)} < 0$ . ולכן הפונקציה יורדת בת.ה.  
ג.  $(1, 0)$ .

(35) א.  $x < -\frac{1}{2}, x > 1$ . ב.  $x = -\frac{1}{2}, 1$ . ג.  $(-2, 0)$ .

ד. מתקבל:  $y' = \frac{-3}{(2x+1)(x-1)} < 0$ .

(36) ב.  $x > 1, e^{-4} < x < e^{-1}$ .

ג. i. 2 נקודות והן:  $(e^{-2}, 0)$ ,  $(1, 0)$ . הנקודה שבה:  $x = 0$  לא קיימת עקב ת.ה.

ii.  $x \neq 1, x > e^{-2}$ . ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה. שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

(37) א.  $x > 0$ . ב.  $(e^{-\sqrt{3}}, 0)$ ,  $(e^{\sqrt{3}}, 0)$ ,  $(1, 0)$ . ג.  $\min(e, -2)$ ,  $\max(e^{-1}, 2)$ .

ה.  $(e^2, 2)$ ,  $(e^{-2}, -2)$ ,  $(1, 0)$ .

(38) א.  $x = e$ . ב. מתקבל:  $y' = \frac{-e}{x(x+e)} < 0$ . ג.  $y = -\frac{1}{2e}x + \ln 2$ .

(39) א. i.  $x > -a, x \neq 1-a$ . ii.  $(e-a, e)$ . iii.  $\left(0, \frac{a}{\ln a}\right)$ .

iv.  $x = 1-a$ . ב.  $a = 2$ . ד.  $k < e$ .

(40) א. i.  $x > 0$ . ii.  $x = 0$ . ב.  $\min(1, 1)$ . ג. עולה:  $x > 1$ , יורדת:  $0 < x < 1$ .

סקיצות לשאלות:

(27)



(28)



(29)



(34)



(35)



(37)



(39)

