מתמטיקה לכלכלנים א

פרק 25 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות טריגונומטריות הפוכות

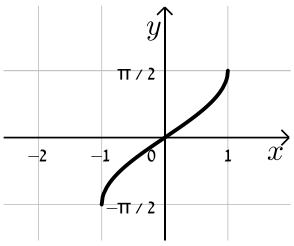
תוכן העניינים

1. הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות 1
2. הנגזרות של פונקציות טריגונומטריות הפוכות 4

הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות:

סיכום כללי:

תיאור גרפי של הפונקציה: $f(x)=\arcsin(x)$:

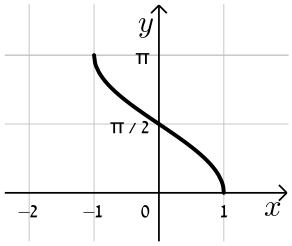


סימון נוסף: $f(x)=\sin^{-1}(x)$.

תחום הגדרה: $-1\le x\le 1$.

טווח: $-\frac{\pi}{2}\le f(x)\le\frac{\pi}{2}$.

תיאור גרפי של הפונקציה: $f(x)=\arccos(x)$:

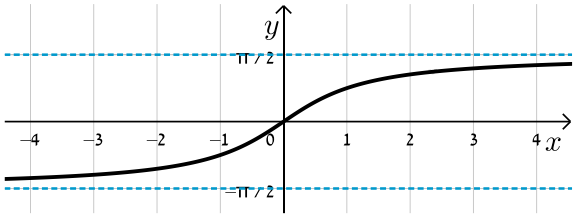


סימון נוסף: $f(x)=\cos^{-1}(x)$.

תחום הגדרה: $-1\le x\le 1$.

טווח: $0\le f(x)\le\pi$.

תיאור גרפי של הפונקציה: $f(x)=\arctan(x)$:

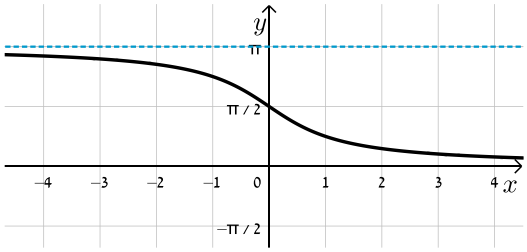


סימון נוסף: $f(x)=\tan^{-1}(x)$.

תחום הגדרה: $-\infty<x<\infty$.

טווח: $-\frac{\pi}{2}<f(x)<\frac{\pi}{2}$.

תיאור גרפי של הפונקציה: $f(x)=\operatorname{arccot}(x)$:



סימון נוסף: $f(x)=\cot^{-1}(x)$.

תחום הגדרה: $-\infty<x<\infty$.

טווח: $0<f(x)<\pi$.

קשרים בין הפונקציות הטריגונומטריות להפוכות:

עבור הפונקציות הטריגונומטריות, שאינן חח"ע, נקבל את הקשרים הבאים:

הפונקציה	הזהות
סינוס	$\sin\left(\sin^{-1}(x)\right)=x \qquad -1\le x\le 1$
	$\sin^{-1}\left(\sin(x)\right)=\begin{cases} x-2\pi k & -\frac{\pi}{2}+2\pi k\le x\le\frac{\pi}{2}+2\pi k \\ \pi(k+1)-x & \frac{\pi}{2}+2\pi k\le x\le\frac{3\pi}{2}+2\pi k \end{cases}$
קוסינוס	$\cos\left(\cos^{-1}(x)\right)=x \qquad -1\le x\le 1$
	$\cos^{-1}\left(\cos(x)\right)=\begin{cases} x-2\pi k & 2\pi k\le x\le\pi(1+2k) \\ 2\pi k-x & \pi(1+2k)\le x\le 2\pi(k+1) \end{cases}$
טנגנס	$\tan\left(\tan^{-1}(x)\right)=x \qquad -\infty<x<\infty$
	$\tan^{-1}\left(\tan(x)\right)=x-\pi k \qquad -\frac{\pi}{2}+\pi k<x<\frac{\pi}{2}+\pi k$
קוטנגנס	$\cot\left(\cot^{-1}(x)\right)=x \qquad -\infty<x<\infty$
	$\cot^{-1}\left(\cot(x)\right)=x-\pi k \qquad \pi k<x<\pi+\pi k$

שאלות:

1) חשב ללא מחשבון:

א. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ב. $\arccos(-1)$

ג. $\operatorname{arccot}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

ד. $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$

ה. $\arccos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

ו. $\arcsin(-0.5)$

2) חשב ללא מחשבון:

א. $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

ב. $\sin\left(\arcsin(-0.5)\right)$

ג. $\sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

ד. $\cos\left(\operatorname{arccot}(1)\right)$

ה. $\sin\left(2\arctan\left(\sqrt{3}\right)\right)$

ו. $\tan\left(-\operatorname{arccot}\left(\sqrt{3}\right)\right)$

3) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $y=\arcsin\frac{2x+1}{3-3x}$

ב. $y=\arccos\frac{x+3}{2x+1}$

ג. $y=\arctan\frac{1}{1-\ln x}$

4) הוכח כי לכל x מתחום ההגדרה מתקיים:

א. $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

ב. $\sin\left(2\arccos x\right)=2x\sqrt{1-x^2}$.

ג. $\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$.

ד. $x\neq 0$, $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\frac{x}{|x|}$.

5) הראה את הקשר הבא: $\arctan 1+\arctan 2+\arctan 3=\pi$.

תשובות סופיות:

1) א. $-\frac{\pi}{4}$ ב. π ג. $\frac{\pi}{3}$ ד. $-\frac{\pi}{3}$ ה. ϕ ו. $-\frac{\pi}{6}$.

2) א. $-\frac{\pi}{6}$ ב. $-\frac{1}{2}$ ג. $\frac{1}{2}$ ד. 1 ה. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ו. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3) א. $x\geq 4$, $x\leq\frac{2}{5}$ ב. $x\geq 2$, $x\leq-\frac{4}{3}$ ג. $x>0$, $x\neq e$.

4) שאלות הוכחה.

5) הוכחה.

הנגזרת של פונקציות טריגונומטריות הפוכות:

סיכום כללי:

נוסחאות הגזירה של הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות:

$$f(x)=\arcsin(x)\rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x)=\arccos(x)\rightarrow f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x)=\arctan(x)\rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x)=\operatorname{arccot}(x)\rightarrow f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$$

שאלות:

1) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\sin^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)$.

2) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\left(\sin^{-1}(x)\right)^2$.

3) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$.

4) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\left(\cos^{-1}\left(x^2\right)\right)^2$.

5) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x}{\arccos(x)}$.

6) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

7) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$.

8) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\sqrt{\operatorname{arccot}(x)}$.

9) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\cos\left(\arcsin\left(x^2\right)\right)$.

10) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\arctan\left(\sqrt{\sin\left(\sqrt{x}\right)}\right)$.

תשובות סופיות:

1) $f'(x)=\dfrac{-3}{2x\sqrt{x-9}}$

2) $f'(x)=\dfrac{2\sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $f'(x)=\dfrac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & x>0\\ -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & x<0\end{cases}$

4) $f'(x)=\dfrac{-4x\arccos\left(x^2\right)}{\sqrt{1-x^4}}$

5) $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^{-1}(x)}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\cos^{-1}(x)\right)}$

6) $f'(x)=\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{x}{x^2+1}$

7) $f'(x)=\dfrac{-1}{2x\sqrt{x^2-1}}$

8) $f'(x)=\dfrac{-1}{2\left(1+x^2\right)\sqrt{\operatorname{arccot}(x)}}$

9) $f'(x)=\dfrac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$

10) $f'(x)=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\left(1+\sin\sqrt{x}\right)\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$