

# מבוא מתמטי לפיזיקה מודרנית

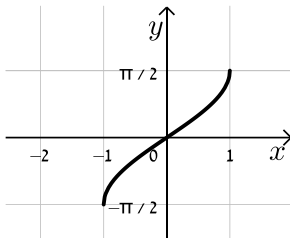
פרק 10 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות טריגונומטריות הפוכות

תוכן העניינים

1. הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות ..... 1
2. הנגזרות של פונקציות טריגונומטריות הפוכות ..... 4

## הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות:

### סיכום כללי:

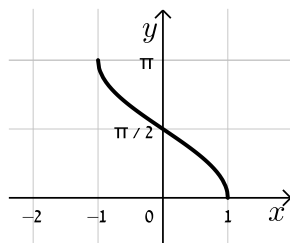


תיאור גרפי של הפונקציה:  $f(x) = \arcsin(x)$

סימון נוסף:  $f(x) = \sin^{-1}(x)$

תחום הגדרה:  $-1 \leq x \leq 1$

טווח:  $-\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$

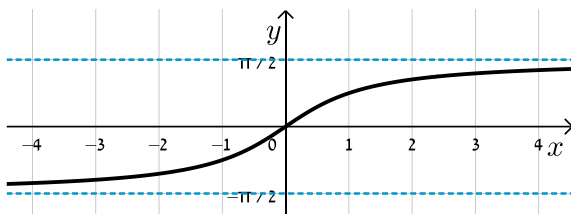


תיאור גרפי של הפונקציה:  $f(x) = \arccos(x)$

סימון נוסף:  $f(x) = \cos^{-1}(x)$

תחום הגדרה:  $-1 \leq x \leq 1$

טווח:  $0 \leq f(x) \leq \pi$

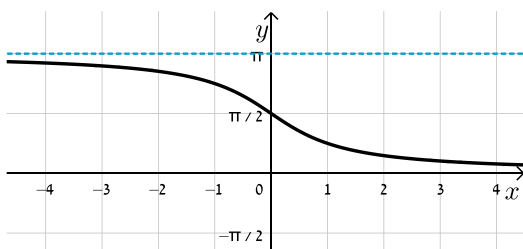


תיאור גרפי של הפונקציה:  $f(x) = \arctan(x)$

סימון נוסף:  $f(x) = \tan^{-1}(x)$

תחום הגדרה:  $-\infty < x < \infty$

טווח:  $-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}$



תיאור גרפי של הפונקציה:  $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$

סימון נוסף:  $f(x) = \cot^{-1}(x)$

תחום הגדרה:  $-\infty < x < \infty$

טווח:  $0 < f(x) < \pi$

### קשרים בין הפונקציות הטריגונומטריות להפוכות:

עבור הפונקציות הטריגונומטריות, שאינן חח"ע, נקבל את הקשרים הבאים:

הפונקציה	הזהות
סינוס	$\sin(\sin^{-1}(x)) = x \quad -1 \leq x \leq 1$
	$\sin^{-1}(\sin(x)) = \begin{cases} x - 2\pi k & -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi(k+1) - x & \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$
קוסינוס	$\cos(\cos^{-1}(x)) = x \quad -1 \leq x \leq 1$
	$\cos^{-1}(\cos(x)) = \begin{cases} x - 2\pi k & 2\pi k \leq x \leq \pi(1+2k) \\ 2\pi k - x & \pi(1+2k) \leq x \leq 2\pi(k+1) \end{cases}$
טנגנס	$\tan(\tan^{-1}(x)) = x \quad -\infty < x < \infty$
	$\tan^{-1}(\tan(x)) = x - \pi k \quad -\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$
קוטנגנס	$\cot(\cot^{-1}(x)) = x \quad -\infty < x < \infty$
	$\cot^{-1}(\cot(x)) = x - \pi k \quad \pi k < x < \pi + \pi k$

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון:

א. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	ב. $\arccos(-1)$
ג. $\operatorname{arccot}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	ד. $\arctan(-\sqrt{3})$
ה. $\arccos\left(\frac{\pi}{3}\right)$	ו. $\arcsin(-0.5)$

(2) חשב ללא מחשבון:

א. $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$	ב. $\sin(\arcsin(-0.5))$
ג. $\sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$	ד. $\cos(\operatorname{arccot}(1))$
ה. $\sin\left(2 \arctan(\sqrt{3})\right)$	ו. $\tan(-\operatorname{arccot}(\sqrt{3}))$

(3) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

ב.  $y = \arccos \frac{x+3}{2x+1}$

א.  $y = \arcsin \frac{2x+1}{3-3x}$

ג.  $y = \arctan \frac{1}{1-\ln x}$

(4) הוכח כי לכל  $x$  מתחום ההגדרה מתקיים :

א.  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

ב.  $\sin(2 \arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

ג.  $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$

ד.  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \frac{x}{|x|}$ ,  $x \neq 0$

(5) הראה את הקשר הבא:  $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$

### תשובות סופיות:

(1) א.  $-\frac{\pi}{4}$  ב.  $\pi$  ג.  $\frac{\pi}{3}$  ד.  $-\frac{\pi}{3}$  ה.  $\phi$  ו.  $-\frac{\pi}{6}$

(2) א.  $-\frac{\pi}{6}$  ב.  $-\frac{1}{2}$  ג.  $\frac{1}{2}$  ד. 1 ה.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ו.  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(3) א.  $x \leq \frac{2}{5}$ ,  $x \geq 4$  ב.  $x \leq -\frac{4}{3}$ ,  $x \geq 2$  ג.  $x > 0$ ,  $x \neq e$

(4) שאלות הוכחה.

(5) הוכחה.

## הנגזרת של פונקציות טריגונומטריות הפוכות:

### סיכום כללי:

נוסחאות הגזירה של הפונקציות הטריונומטריות ההפוכות:

$$f(x) = \arcsin(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arccos(x) \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arctan(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \operatorname{arccot}(x) \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

### שאלות:

1. גזור את הפונקציה הבאה:  $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)$

2. גזור את הפונקציה הבאה:  $f(x) = (\sin^{-1}(x))^2$

3. גזור את הפונקציה הבאה:  $f(x) = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

4. גזור את הפונקציה הבאה:  $f(x) = (\cos^{-1}(x^2))^2$

5. גזור את הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x}{\arccos(x)}$

6. גזור את הפונקציה הבאה:  $f(x) = x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

7. גזור את הפונקציה הבאה:  $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$

$$\cdot f(x) = \sqrt{\operatorname{arccot}(x)} : \text{גזור את הפונקציה הבאה: (8)}$$

$$\cdot f(x) = \cos(\arcsin(x^2)) : \text{גזור את הפונקציה הבאה: (9)}$$

$$\cdot f(x) = \arctan\left(\sqrt{\sin(\sqrt{x})}\right) : \text{גזור את הפונקציה הבאה: (10)}$$

### תשובות סופיות:

$$f'(x) = \frac{-3}{2x\sqrt{x-9}} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2\sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & x > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{-4x \arccos(x^2)}{\sqrt{1-x^4}} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^{-1}(x)} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2} \cdot (\cos^{-1}(x))} \quad (5)$$

$$f'(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2+1} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x^2-1}} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arccot}(x)}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \frac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}} \quad (9)$$

$$f'(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}(1+\sin\sqrt{x})\sqrt{\sin\sqrt{x}}} \quad (10)$$