מכינה ייעודית במתמטיקה לתלמידי הנדסה ומדעים מדויקים

פרק 41 - חשבון דיפרנציאלי - מהי פונקציה

תוכן העניינים

1. מושג הפונקציה ..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית ..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית והלוגריתמית ..... (ללא ספר)
5. הזזות ושיקופים של פונקציות ..... (ללא ספר)
6. תרגול נוסף בתחום הגדרה ..... (ללא ספר)
7. קבוצות ופונקציות - מבט לעומק ..... (ללא ספר)
8. פתרון תרגילי הפרק 1

הפונקציה הממשית

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $y=x^3-x^2-4x+1$

ב. $y=\frac{1}{x^2-4}$

ג. $y=\frac{4x+1}{x^2+1}$

ד. $y=\frac{1}{x^3-x}$

ה. $y=\frac{x^2}{x^2-x-2}$

ו. $y=\sqrt{x-4}$

ז. $y=\sqrt{x^2+x-2}$

ח. $y=\sqrt[3]{x^2+x-1}$

ט. $y=\frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$

י. $y=\ln\left(x^2+x-2\right)$

יא. $y=\log x+\frac{1}{\log x}$

יב. $y=e^{x^2+x+1}$

יג. $y=\log_x\left(x+4\right)$

יד. $y=\tan\left(10x\right)$

טו. $y=\cot\left(4x\right)$

טז. $y=\arctan\left(x+4\right)$

יז. $y=\arcsin\left(x-4\right)$

יח. $y=\arccos\left(x+1\right)$

2) נתונות הפונקציות הבאות: $f\left(x\right)=x-4$, $g\left(x\right)=x^2$, $h\left(x\right)=\frac{4}{x}$.

חשב את הפונקציות המרוכבות הבאות:

א. $f\left(g\left(1\right)\right)$

ב. $h\left(g\left(f\left(5\right)\right)\right)$

ג. $f\left(g\left(x\right)\right)$

ד. $h\left(f\left(x\right)\right)$

ה. $h\left(f\left(x\right)\right)$

ו. $h\left(h\left(x\right)\right)$

3) נתון: $f\left(x\right)=\frac{x-2}{x-1}$. חשב $f\left(f\left(x\right)\right)$ עבור $x=3$.

4) נתון: $g(x)=\frac{5-x}{x-7}$ $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$. חשב $f(g(x))+g(f(x))$ עבור $x=8$.

5) נתון: $\begin{matrix} f(x)=x^2-7x \\ g(x)=\ln x \end{matrix}$. חשב $f(g(x))$ עבור $x=e^2$.

6) נתון: $g(x)=\ln x$ $f(x)=e^{2x}$. חשב $f(g(x))$ עבור $x=2$.

7) נתון: $g(x)=\begin{cases} x+3 & x>4 \\ 3x & x\le 4 \end{cases}$, $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x>0 \\ x^2 & x\le 0 \end{cases}$. חשב $f(g(x)), g(f(x))$.

8) בתרגילים הבאים הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצא את התמונה של הפונקציה.

א. $f(x)=\frac{x-1}{3}$ ב. $f(x)=\frac{x+1}{x}$

ג. $f(x)=\frac{3x-2}{x-2}$ ד. $f(x)=x^2-4,\ x\ge 0$

9) בתרגילים הבאים, בדוק האם הפונקציה היא חח"ע.
בנוסף, מצא את התמונה של הפונקציה:

א. $f(x)=x+\frac{1}{x}$ ב. $f(x)=x^2-x$ ג. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

10) בתרגילים הבאים, בדוק האם הפונקציה היא חח"ע,
אם כן, מצא את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

א. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ב. $y=\frac{x^2+3}{2x-1}$ ג. $f(x)=\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^3$

11) נתונה $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$. האם הפונקציה היא חח"ע?
מצא את התמונה של הפונקציה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) מצא איזה מבין הפונקציות הבאות הן אי זוגיות ואיזה זוגיות:

א. $y=4x^3$ ב. $y=x^4+x^{10}$ ג. $y=1$

ד. $y=\frac{1}{x}$ ה. $y=x^2+\sin^2 x$ ו. $y=2^x$

ז. $y=\ln x+x^2$ ח. $y=\sin x\cdot\cos x$

13) מצא את המחזור של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $y=2\sin x$ ב. $y=5+3\sin(4x+1)$

ג. $y=\tan\frac{x}{3}$ ד. $y=\sin^2 x$

14) רשום כל אחת מהפונקציות הבאות כפונקציה מפוצלת[1] ושרטט את גרף הפונקציה:

א. $y=|x-2|$ ב. $y=3|x+1|$

ג. $y=x^2+2|x-1|$ ד. $y=\frac{|x|}{x}$

תשובות סופיות:

1) א. כל x. ב. $x\neq\pm2$ ג. כל x. ד. $x\neq0,1,-1$

ה. $x\neq2,-1$ ו. $x\geq4$ ז. $x\geq1$, $x\leq-2$ ח. כל x.

ט. $-1<x<1$ י. $x>1$, $x<-2$ יא. $x>0$, $x\neq1$ יב. כל x.

יג. $x>0$, $x\neq1$ יד. $x\neq\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{10}$ טו. $x\neq\frac{\pi k}{4}$ טז. כל x.

יז. $3<x<5$ יח. $-2<x<0$

[1] נקראת גם: פונקציה "מפוצלת", "מוטלאת", פונקציית "תפר" או פונקציה "לפי מקרים".

2) א. -3 ב. 4 ג. x^2-4 ד. $\frac{4}{x-4}$ ה. $x-8$ ו. x

3) 3 **4)** $\frac{69}{13}$ **5)** -10 **6)** 4

7)
$$f(g(x))=\begin{cases}\frac{1}{x+3} & x>4\\ \frac{1}{3x} & 0<x\le 4\\ (3x)^2 & x\le 0\end{cases},\quad g(f(x))=\begin{cases}x^2+3 & x<2\\ 3x^2 & -2\le x\le 0\\ \frac{1}{x}+3 & 0<x<\frac{1}{4}\\ 3\frac{1}{x} & x\ge\frac{1}{4}\end{cases}$$

8) א. $f^{-1}(x)=3x+1$, כל y.

ב. $f^{-1}(x)=\frac{1}{x-1}$, $y\ne 1$

ג. $f^{-1}(x)=\frac{2x-2}{x-3}$, $y\ne 3$

ד. $f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}$, $y\ge -4$

9) א. לא. $y\le -2$ או $y\ge 2$

ב. לא. $x+\frac{1}{4}\ge 0$, $y-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{x+\frac{1}{4}}$

ג. לא. $0\le y\le 1$

10) א. כן. $x>0$, $y>0$ $f^{-1}(x)=1-\frac{1}{x^2}$

ב. לא. $y\ge 2.3$ או $y\le -1.3$

ג. כן. $y\ne 1$, $f^{-1}(x)=\frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2}$

11) לא. $y\ge\frac{6}{\sqrt{3}}$

12) זוגית: 2,3,5,8. אי- זוגית: 1,4. כלליות: 6,7.

13) א. 2π ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. 3π ד. π

14) א. $y=\begin{cases}x-2 & x\ge 2\\ 2-x & x<2\end{cases}$

ב. $y=\begin{cases}3x+3 & x\ge -1\\ -3x-3 & x<-1\end{cases}$

ג. $y=\begin{cases}x^2+2x-2 & x\ge 1\\ x^2-2x+2 & x<1\end{cases}$

ד. $y=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$