מכינה כללית במתמטיקה

פרק 35 - חשבון דיפרנציאלי - חילוק פולינומים ופתרון משוואות פולינומיאליות

תוכן העניינים

1. חילוק פולינומים 1
2. פתרון משוואות 2
3. שאלות מסכמות 3

חילוק פולינומים:

סיכום כללי:

בחילוק פולינום $p(x)$ בפולינום $q(x)$ (נכתב: $\overline{p(x)|q(x)}$) יש לבצע 4 שלבים:

1) חלוקת האיבר במעלה הגבוהה ביותר של $p(x)$ באיבר במעלה הגבוהה ביותר של $q(x)$.
2) רישום תוצאת החילוק בצד והכפלתה בכל הפולינום המחלק $q(x)$.
3) חיסור של תוצאת ההכפלה בפולינום המחולק $p(x)$.
4) חזרה לשלב הראשון כאשר מבצעים את חילוק האיבר במעלה הגבוהה ביותר של $q(x)$ בתוצאת החיסור.

התהליך מסתיים כאשר לא ניתן לחלק עוד.
במידה ותוצאת החיסור האחרונה מניבה ביטוי שמעלתו קטנה משל האיבר המחלק ב-$q(x)$ אז נתייחס לביטוי זה כאל שארית החלוקה.

שאלות:

בצע את חילוק הפולינומים הבאים:

1) $\frac{x^2-5x-14}{x+2}$
2) $\frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}$
3) $\frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}$
4) $\frac{x^3-4x^2+9}{x-3}$
5) $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}$
6) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$
7) $\frac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10}$
8) $\frac{4x^2+x-1}{x-2}$

תשובות סופיות:

1) $x-7$
2) x^2+2x+5
3) x^3-2x^2+5x-1
4) x^2-x-3
5) x^2-4
6) x^2+1
7) $4x^2+10x+1$
8) $4x+9+\frac{17}{x-2}$

פתרון משוואות:

סיכום כללי:

משפטים כלליים:

- לכל משוואה פולינומיאלית ממעלה n יש בדיוק n שורשים.
- אם לפולינום שורש מרוכב $a+bi$ אז גם המספר הצמוד $a-bi$ הוא שורש שלו.
- יהי $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ פולינום שכל מקדמיו מספרים שלמים.
  אם לפולינום שורש שהוא מספר שלם, אז הוא מחלק את האיבר החופשי a_0.
- אם $x=a$ שורש של פולינום $p(x)$, אז הפולינום $p(x)$ מתחלק ב-$x-a$ ללא שארית.
- אם $p(x)$ פולינום ואם $p(a)=0$ וגם $p'(a)=0$ אז $x=a$ הוא שורש כפול.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $k^4+3k^3-15k^2-19k+30=0$
2) $k^3+2k^2-3k+20=0$
3) $k^5+3k^4+2k^3-2k^2-3k-1=0$
4) $k^3-6k^2+12k-8=0$
5) $k^6-3k^4+3k^2-1=0$
6) $k^3-k^2+k-1=0$
7) $k^4-3k^3+6k^2-12k+8=0$

תשובות סופיות:

1) $k_1=1\ ,\ k_2=-2\ ,\ k_3=3\ ,\ k_4=-5$
2) $k_1=-4\ ,\ k_{2,3}=1\pm 2i$
3) $k_1=1\ ,\ k_2=-1\ ,\ k_3=-1\ ,\ k_4=-1\ ,\ k_5=-1$
4) $k_1=2\ ,\ k_2=2\ ,\ k_3=2$
5) $k_1=1\ ,\ k_2=-1\ ,\ k_3=1\ ,\ k_4=-1,\ k_5=1,\ k_6=-1$
6) $k_1=1\ ,\ k_{2,3}=\pm i$
7) $k_1=1\ ,\ k_2=2\ ,\ k_{3,4}=\pm 2i$

שאלות מסכמות:

שאלות:

1) לפניך הפולינום הבא: $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

א. מצא את המקדמים של הפולינום אם נתון כי:

i. הפולינום מתחלק ב-$2x+3$ ללא שארית.

ii. הפולינום מקיים: $P(4.5)=27$.

iii. לפונקציה $y=P(x)$ יש מקסימום מקומי עבור $x=0$ ומינימום מקומי עבור $x=\frac{1}{2}$.

ב. הצב את המקדמים שקיבלת וסרטט את גרף הפונקציה $y=P(x)$.

2) מצא את ערכי הפרמטרים a ו-b של הפולינום: $P(x)=ax^3+bx^2-9ax-3b-24a$

אם נתון ש-$P(x)$ מתחלק ב-x^2-9 ללא שארית וגם: $P(1)=-10$.

3) הוכח כי: $P(x)=x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n+1}-1$ מתחלק ב-$(x-1)^3$ ללא שארית לכל n טבעי.

4) עבור אלו ערכים של a ו-b מתחלק הפולינום: $P(x)=ax^6+4x^5+bx^4+2$ ב-$(x-1)^2$ ללא שארית?

5) אם מחלקים את הפולינום $P(x)$ ב-$(3x-4)$ מקבלים שארית 2, ואם מחלקים אותו ב-$(x-1)$ מקבלים שארית 2-.

מצא את שארית החילוק של הפולינום $P(x)$ ב-$(x-1)(3x-4)$.

6) נתון הפולינום $P(x)$. אם נחלק אותו ב-$4-x^2$ נקבל שארית 1, ואם נחלק אותו ב-$x-3$ נקבל שארית 4. מצא את שארית החילוק של הפולינום $P(x)$ ב-$(4-x^2)(x-3)$.

7) הפולינום: $P(x)=x^5+bx^4+cx^2+2x-1$, (b ו-c פרמטרים) מתחלק ב-$x-1$ עם שארית $R_1=2\frac{3}{4}$ ומתחלק ב-$x-2$ עם שארית $R_2=41$.

א. מצא את b ו-c.

ב. מהן המנה והשארית בחלוקת $P(x)$ ב-x^2-3x?

8) נתון הפולינום: $P(x)=x^4-5x^3+ax^2-10x-28$.

ידוע כי $P(x)$ מתחלק ללא שארית בפולינום x^2-5x+b.

א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו-b.

ב. חשב את שורשי המשוואה $P(x)=0$ מעל המספרים המרוכבים.

9) עבור אילו ערכים של הקבוע k למשוואה $-x^3+(1-k^2)x^2+(1-3k)x-1=0$ יש פתרון $x=1$? מצא את כל הפתרונות של המשוואה עבור k שמצאת.

הערה:

השאלה הבאה מיועדת רק לתלמידים שלמדו נוסחאות וייטה למשוואה ממעלה שלישית:

10) מצא את כל שורשי המשוואה $t^3-2t^2\left(2+\sqrt{3}\right)+t\left(\sqrt{192}+1\right)-\sqrt{12}=0$

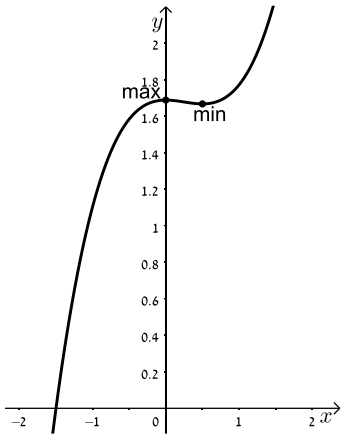
אם ידוע כי מכפלה של שניים משורשיה שווה ל-1.

11) מצא פולינום ממשי ממעלה רביעית ששורשיו הם: $-1\ ,\ 2\ ,\ 1+\sqrt{2}i$.

12) פתור את המשוואה $z^4-2z^3+z^2+2z-2=0$ אם ידוע שאחד מפתרונותיה הוא $z=1+i$.

תשובות סופיות:

1) א. $P(x)=\frac{1}{3}x^3+-\frac{1}{4}x^2+\frac{27}{16}$ ב. להלן גרף:



2) $a=\frac{1}{4}$, $b=1$.

3) שאלת הוכחה.

4) $a=2$, $b=-8$.

5) $R(x)=12x-14$.

6) $R(x)=\frac{3}{5}x^2-\frac{7}{5}$.

7) א. $b=\frac{1}{4}$, $c=\frac{1}{2}$

ב. שארית: $91.25x-1$, מנה: $x^3+3.25x^2+9.75x+29.75$

8) א. $a=-12$, $b=-14$. ב. $x_{1,2}=-2,7$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}i$.

9) עבור $k=0$ מקבלים: $x_1=x_2=1$, $x_3=-1$.

עבור $k=-3$ מקבלים: $x_1=1$, $x_{2,3}=\frac{1}{2}\left(-9\pm\sqrt{85}\right)$.

10) $t_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$, $t_3=\sqrt{12}$.

11) $P(x)=x^4-3x^3+3x^2+x-6$.

12) $z_{1,2}=1\pm i$, $z_{3,4}=\pm1$.