

בעיות נבחרות באלגברה

פרק 1 - חשבון דיפרנציאלי - חילוק פולינומים ופתרון משוואות פולינומיאליות

תוכן העניינים

1. חילוק פולינומים
2. פתרון משוואות
3. שאלות מסכמות

חילוק פולינומים:

סיכום כללי:

בחילוק פולינום $p(x)$ בפולינום $q(x)$ (נכתב: $\overline{p(x)}|q(x)$) יש לבצע 4 שלבים:

- (1) חלוקת האיבר במעלה הגבוהה ביותר של $p(x)$ באיבר במעלה הגבוהה ביותר של $q(x)$.
- (2) רישום תוצאת החילוק בצד והכפלתה בכל הפולינום המחלק $q(x)$.
- (3) חיסור של תוצאת ההכפלה בפולינום המחולק $p(x)$.
- (4) חזרה לשלב הראשון כאשר מבצעים את חילוק האיבר במעלה הגבוהה ביותר של $q(x)$ בתוצאת החיסור.

התהליך מסתיים כאשר לא ניתן לחלק עוד. במידה ותוצאת החיסור האחרונה מניבה ביטוי שמעלתו קטנה משל האיבר המחלק ב- $q(x)$ אז נתייחס לביטוי זה כאל שארית החלוקה.

שאלות:

בצע את חילוק הפולינומים הבאים:

$\frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x - 1}$ (2)	$\frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2}$ (1)
$\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x - 3}$ (4)	$\frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x + 3}$ (3)
$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}$ (6)	$\frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x + 5}$ (5)
$\frac{4x^2 + x - 1}{x - 2}$ (8)	$\frac{4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10}{x^2 - x + 10}$ (7)

תשובות סופיות:

$x^2 - x - 3$ (4)	$x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ (3)	$x^2 + 2x + 5$ (2)	$x - 7$ (1)
$4x + 9 + \frac{17}{x - 2}$ (8)	$4x^2 + 10x + 1$ (7)	$x^2 + 1$ (6)	$x^2 - 4$ (5)

פתרון משוואות:

סיכום כללי:

משפטים כלליים:

- לכל משוואה פולינומיאלית ממעלה n יש בדיוק n שורשים.
- אם לפולינום שורש מרוכב $a+bi$ אז גם המספר הצמוד $a-bi$ הוא שורש שלו.
- יהי $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ פולינום שכל מקדמיו מספרים שלמים. אם לפולינום שורש שהוא מספר שלם, אז הוא מחלק את האיבר החופשי a_0 .
- אם $x=a$ שורש של פולינום $p(x)$, אז הפולינום $p(x)$ מתחלק ב- $x-a$ ללא שארית.
- אם $p(x)$ פולינום ואם $p(a)=0$ וגם $p'(a)=0$ אז $x=a$ הוא שורש כפול.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(1) \quad k^4 + 3k^3 - 15k^2 - 19k + 30 = 0$$

$$(2) \quad k^3 + 2k^2 - 3k + 20 = 0$$

$$(3) \quad k^5 + 3k^4 + 2k^3 - 2k^2 - 3k - 1 = 0$$

$$(4) \quad k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0$$

$$(5) \quad k^6 - 3k^4 + 3k^2 - 1 = 0$$

$$(6) \quad k^3 - k^2 + k - 1 = 0$$

$$(7) \quad k^4 - 3k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad k_1 = 1, k_2 = -2, k_3 = 3, k_4 = -5$$

$$(2) \quad k_1 = -4, k_{2,3} = 1 \pm 2i$$

$$(3) \quad k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = -1, k_4 = -1, k_5 = -1$$

$$(4) \quad k_1 = 2, k_2 = 2, k_3 = 2$$

$$(5) \quad k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 1, k_4 = -1, k_5 = 1, k_6 = -1$$

$$(6) \quad k_1 = 1, k_{2,3} = \pm i$$

$$(7) \quad k_1 = 1, k_2 = 2, k_{3,4} = \pm 2i$$

שאלות מסכמות:

שאלות:

(1) לפניך הפולינום הבא : $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

א. מצא את המקדמים של הפולינום אם נתון כי :

i. הפולינום מתחלק ב- $2x+3$ ללא שארית.

ii. הפולינום מקיים : $P(4.5) = 27$.

iii. לפונקציה $y = P(x)$ יש מקסימום מקומי עבור $x = 0$ ומינימום

מקומי עבור $x = \frac{1}{2}$.

ב. הצב את המקדמים שקיבלת וסרטט את גרף הפונקציה $y = P(x)$.

(2) מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b של הפולינום : $P(x) = ax^3 + bx^2 - 9ax - 3b - 24a$

אם נתון ש- $P(x)$ מתחלק ב- $x^2 - 9$ ללא שארית וגם : $P(1) = -10$.

(3) הוכח כי : $P(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n+1} - 1$ מתחלק ב- $(x-1)^3$ ללא שארית לכל n טבעי.

(4) עבור אלו ערכים של a ו- b מתחלק הפולינום : $P(x) = ax^6 + 4x^5 + bx^4 + 2$ ב- $(x-1)^2$

ללא שארית?

(5) אם מחלקים את הפולינום $P(x)$ ב- $(3x-4)$ מקבלים שארית 2, ואם מחלקים אותו

ב- $(x-1)$ מקבלים שארית -2.

מצא את שארית החילוק של הפולינום $P(x)$ ב- $(x-1)(3x-4)$.

(6) נתון הפולינום $P(x)$. אם נחלק אותו ב- $x^2 - 4$ נקבל שארית 1, ואם נחלק אותו ב- $x-3$

נקבל שארית 4. מצא את שארית החילוק של הפולינום $P(x)$ ב- $(4-x^2)(x-3)$.

(7) הפולינום: $P(x) = x^5 + bx^4 + cx^2 + 2x - 1$, $(b$ ו- c פרמטרים) מתחלק ב- $x-1$

עם שארית $R_1 = 2\frac{3}{4}$ ומתחלק ב- $x-2$ עם שארית $R_2 = 41$.

א. מצא את b ו- c .

ב. מהן המנה והשארית בחלוקת $P(x)$ ב- $x^2 - 3x$?

(8) נתון הפולינום: $P(x) = x^4 - 5x^3 + ax^2 - 10x - 28$.

ידוע כי $P(x)$ מתחלק ללא שארית בפולינום $x^2 - 5x + b$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

ב. חשב את שורשי המשוואה $P(x) = 0$ מעל המספרים המרוכבים.

(9) עבור אילו ערכים של הקבוע k למשוואה $-x^3 + (1-k^2)x^2 + (1-3k)x - 1 = 0$

יש פתרון $x=1$? מצא את כל הפתרונות של המשוואה עבור k שמצאת.

הערה:

השאלה הבאה מיועדת רק לתלמידים שלמדו נוסחאות וייטה למשוואה ממעלה שלישית:

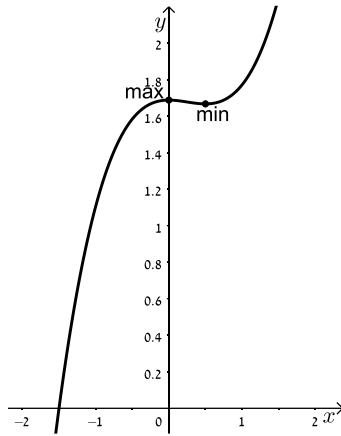
(10) מצא את כל שורשי המשוואה $t^3 - 2t^2(2 + \sqrt{3}) + t(\sqrt{192} + 1) - \sqrt{12} = 0$

אם ידוע כי מכפלה של שניים משורשיה שווה ל-1.

(11) מצא פולינום ממשי ממעלה רביעית ששורשיו הם: $-1, 2, 1 + \sqrt{2}i$.

(12) פתור את המשוואה $z^4 - 2z^3 + z^2 + 2z - 2 = 0$ אם ידוע שאחד מפתרונותיה הוא $z = 1 + i$.

תשובות סופיות:



ב. להלן גרף: $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + -\frac{1}{4}x^2 + \frac{27}{16}$ א. (1)

$a = \frac{1}{4}, b = 1$ (2)

שאלת הוכחה. (3)

$a = 2, b = -8$ (4)

$R(x) = 12x - 14$ (5)

$R(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{7}{5}$ (6)

$b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{2}$ א. (7)

ב. שארית: $91.25x - 1$, מנה: $x^3 + 3.25x^2 + 9.75x + 29.75$

א. $a = -12, b = -14$. ב. $x_{1,2} = -2, 7, x_{3,4} = \pm\sqrt{2}i$ (8)

עבור $k = 0$ מקבלים: $x_1 = x_2 = 1, x_3 = -1$ (9)

עבור $k = -3$ מקבלים: $x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{1}{2}(-9 \pm \sqrt{85})$

$t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}, t_3 = \sqrt{12}$ (10)

$P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6$ (11)

$z_{1,2} = 1 \pm i, z_{3,4} = \pm 1$ (12)