

# אלגברה ליניארית

פרק 2 - חשבון דיפרנציאלי - חילוק פולינומים ופתרון משוואות  
פולינומיות

תוכן העניינים

1. חילוק פולינומים..... 1
2. פתרון משוואות..... 2
3. שאלות מסכמות..... 3

## חילוק פולינומים:

### סיכום כללי:

בחילוק פולינום  $p(x)$  בפולינום  $q(x)$  (נכתב:  $\overline{p(x)}q(x)$ ) יש לבצע 4 שלבים:

- (1) חלוקת האיבר במעלה הגבוהה ביותר של  $p(x)$  באיבר במעלה הגבוהה ביותר של  $q(x)$ .
- (2) רישום תוצאת החילוק בצד והכפלתה בכל הפולינום המחלק  $q(x)$ .
- (3) חיסור של תוצאת ההכפלה בפולינום המחולק  $p(x)$ .
- (4) חזרה לשלב הראשון כאשר מבצעים את חילוק האיבר במעלה הגבוהה ביותר של  $q(x)$  בתוצאת החיסור.

התהליך מסתיים כאשר לא ניתן לחלק עוד.  
במידה ותוצאת החיסור האחרונה מניבה ביטוי שמעלתו קטנה משל האיבר המחלק ב-  $q(x)$  אז נתייחס לביטוי זה כאל שארית החלוקה.

### שאלות:

בצע את חילוק הפולינומים הבאים:

|                                              |                                                                 |
|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| $\frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x - 1} \quad (2)$ | $\frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2} \quad (1)$                         |
| $\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x - 3} \quad (4)$     | $\frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x + 3} \quad (3)$             |
| $\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} \quad (6)$  | $\frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x + 5} \quad (5)$                  |
| $\frac{4x^2 + x - 1}{x - 2} \quad (8)$       | $\frac{4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10}{x^2 - x + 10} \quad (7)$ |

### תשובות סופיות:

|                                       |                                 |                          |                     |
|---------------------------------------|---------------------------------|--------------------------|---------------------|
| $x^2 - x - 3 \quad (4)$               | $x^3 - 2x^2 + 5x - 1 \quad (3)$ | $x^2 + 2x + 5 \quad (2)$ | $x - 7 \quad (1)$   |
| $4x + 9 + \frac{17}{x - 2} \quad (8)$ | $4x^2 + 10x + 1 \quad (7)$      | $x^2 + 1 \quad (6)$      | $x^2 - 4 \quad (5)$ |

## פתרון משוואות:

### סיכום כללי:

#### משפטים כלליים:

- לכל משוואה פולינומאלית ממעלה  $n$  יש בדיוק  $n$  שורשים.
- אם לפולינום שורש מרוכב  $a+bi$  אז גם המספר הצמוד  $a-bi$  הוא שורש שלו.
- יהי  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  פולינום שכל מקדמיו מספרים שלמים. אם לפולינום שורש שהוא מספר שלם, אז הוא מחלק את האיבר החופשי  $a_0$ .
- אם  $x=a$  שורש של פולינום  $p(x)$ , אז הפולינום  $p(x)$  מתחלק ב- $x-a$  ללא שארית.
- אם  $p(x)$  פולינום ואם  $p(a)=0$  וגם  $p'(a)=0$  אז  $x=a$  הוא שורש כפול.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(1) \quad k^4 + 3k^3 - 15k^2 - 19k + 30 = 0 \quad (2) \quad k^3 + 2k^2 - 3k + 20 = 0$$

$$(3) \quad k^5 + 3k^4 + 2k^3 - 2k^2 - 3k - 1 = 0 \quad (4) \quad k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0$$

$$(5) \quad k^6 - 3k^4 + 3k^2 - 1 = 0 \quad (6) \quad k^3 - k^2 + k - 1 = 0$$

$$(7) \quad k^4 - 3k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0$$

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad k_1 = 1, k_2 = -2, k_3 = 3, k_4 = -5 \quad (2) \quad k_1 = -4, k_{2,3} = 1 \pm 2i$$

$$(3) \quad k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = -1, k_4 = -1, k_5 = -1 \quad (4) \quad k_1 = 2, k_2 = 2, k_3 = 2$$

$$(5) \quad k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 1, k_4 = -1, k_5 = 1, k_6 = -1 \quad (6) \quad k_1 = 1, k_{2,3} = \pm i$$

$$(7) \quad k_1 = 1, k_2 = 2, k_{3,4} = \pm 2i$$

## שאלות מסכמות:

### שאלות:

(1) לפניך הפולינום הבא:  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

א. מצא את המקדמים של הפולינום אם נתון כי:

i. הפולינום מתחלק ב- $2x+3$  ללא שארית.

ii. הפולינום מקיים:  $P(4.5) = 27$ .

iii. לפונקציה  $y = P(x)$  יש מקסימום מקומי עבור  $x = 0$  ומינימום

מקומי עבור  $x = \frac{1}{2}$ .

ב. הצב את המקדמים שקיבלת וסרטט את גרף הפונקציה  $y = P(x)$ .

(2) מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  של הפולינום:  $P(x) = ax^3 + bx^2 - 9ax - 3b - 24a$

אם נתון ש- $P(x)$  מתחלק ב- $x^2 - 9$  ללא שארית וגם:  $P(1) = -10$ .

(3) הוכח כי:  $P(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n+1} - 1$  מתחלק ב- $(x-1)^3$  ללא שארית לכל  $n$  טבעי.

(4) עבור אלו ערכים של  $a$  ו- $b$  מתחלק הפולינום:  $P(x) = ax^6 + 4x^5 + bx^4 + 2$  ב- $(x-1)^2$

ללא שארית?

(5) אם מחלקים את הפולינום  $P(x)$  ב- $(3x-4)$  מקבלים שארית 2, ואם מחלקים אותו

ב- $(x-1)$  מקבלים שארית -2.

מצא את שארית החילוק של הפולינום  $P(x)$  ב- $(x-1)(3x-4)$ .

(6) נתון הפולינום  $P(x)$ . אם נחלק אותו ב- $x^2 - 4$  נקבל שארית 1, ואם נחלק אותו ב- $x - 3$

נקבל שארית 4. מצא את שארית החילוק של הפולינום  $P(x)$  ב- $(4-x^2)(x-3)$ .

(7) הפולינום:  $P(x) = x^5 + bx^4 + cx^2 + 2x - 1$ ,  $(b$  ו- $c$  פרמטרים) מתחלק ב- $x-1$

עם שארית  $R_1 = 2\frac{3}{4}$  ומתחלק ב- $x-2$  עם שארית  $R_2 = 41$ .

א. מצא את  $b$  ו- $c$ .

ב. מהן המנה והשארית בחלוקת  $P(x)$  ב- $x^2 - 3x$ ?

(8) נתון הפולינום:  $P(x) = x^4 - 5x^3 + ax^2 - 10x - 28$ .

ידוע כי  $P(x)$  מתחלק ללא שארית בפולינום  $x^2 - 5x + b$ .

א. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

ב. חשב את שורשי המשוואה  $P(x) = 0$  מעל המספרים המרוכבים.

(9) עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  למשוואה  $-x^3 + (1-k^2)x^2 + (1-3k)x - 1 = 0$

יש פתרון  $x=1$ ? מצא את כל הפתרונות של המשוואה עבור  $k$  שמצאת.

### הערה:

השאלה הבאה מיועדת רק לתלמידים שלמדו נוסחאות וייטה למשוואה ממעלה שלישית:

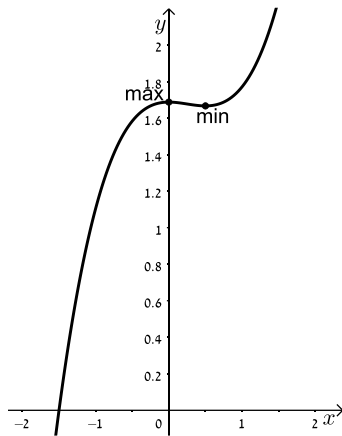
(10) מצא את כל שורשי המשוואה  $t^3 - 2t^2(2 + \sqrt{3}) + t(\sqrt{192} + 1) - \sqrt{12} = 0$

אם ידוע כי מכפלה של שניים משורשיה שווה ל-1.

(11) מצא פולינום ממשי ממעלה רביעית ששורשיו הם:  $-1, 2, 1 + \sqrt{2}i$ .

(12) פתור את המשוואה  $z^4 - 2z^3 + z^2 + 2z - 2 = 0$  אם ידוע שאחד מפתרונותיה הוא  $z = 1 + i$ .

## תשובות סופיות:



(1) א.  $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + -\frac{1}{4}x^2 + \frac{27}{16}$  ב. להלן גרף:

(2)  $a = \frac{1}{4}, b = 1$

(3) שאלת הוכחה.

(4)  $a = 2, b = -8$

(5)  $R(x) = 12x - 14$

(6)  $R(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{7}{5}$

(7) א.  $b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{2}$

ב. שארית:  $91.25x - 1$ , מנה:  $x^3 + 3.25x^2 + 9.75x + 29.75$

(8) א.  $a = -12, b = -14$  ב.  $x_{1,2} = -2, 7, x_{3,4} = \pm\sqrt{2}i$

(9) עבור  $k = 0$  מקבלים:  $x_1 = x_2 = 1, x_3 = -1$

עבור  $k = -3$  מקבלים:  $x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{1}{2}(-9 \pm \sqrt{85})$

(10)  $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}, t_3 = \sqrt{12}$

(11)  $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6$

(12)  $z_{1,2} = 1 \pm i, z_{3,4} = \pm 1$