

מכינה כללית ברמת 5 יחידות לתלמידי מדעי המחשב

פרק 30 - חשבון דיפרנציאלי - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

1. הסבר כללי (ללא ספר)
2. הצבה 1
3. צמצום 2
4. הכפלה בצמוד 3
5. גבולות טריגונומטריים 4
6. פונקציה שואפת לאינסוף 7
7. איקס שואף לאינסוף 8

הצבה

שאלה

חשבו את הגבולות הבאים :

א. $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20

צמצום

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{x + 1} \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

תשובות סופיות

| | | | | |
|--------------------|--------------------|--------|----------------------|-------------------|
| -3 (5) | $n-1$ (4) | 6 (3) | $\frac{10}{8.5}$ (2) | $\frac{5}{6}$ (1) |
| $\frac{1}{5}$ (10) | $\frac{8}{17}$ (9) | 27 (8) | 3 (7) | 32 (6) |

הכפלה בצמוד

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+x}-1}{\sqrt[3]{x}} \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$\frac{3}{8} \quad (4) \qquad -\frac{1}{12} \quad (3) \qquad 4 \quad (2) \qquad \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8) \qquad \frac{1}{3} \quad (7) \qquad \frac{3}{4} \quad (6) \qquad \frac{1}{6} \quad (5)$$

$$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \frac{1}{2} \quad (9)$$

גבולות טריגונומטריים

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$):

- | | |
|---|---|
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$ (2) | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x}$ (1) |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (4) | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x}$ (3) |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x}$ (6) | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ (5) |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3}$ (8) | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$ (7) |
| $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{x^2 - 1}$ (10) | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ (9) |
| $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$ (12) | $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$ (11) |
| $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 10x}$ (14) | $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a}$ (13) |
| $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$ (16) | $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$ (15) |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ (18) | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{\sin^2 x}$ (17) |

תשובות סופיות

| | | | | |
|---------------------------|----------------------|--------------------|---------------------|----------------------|
| $\frac{1}{2}$ (5) | $\frac{1}{2}$ (4) | $\frac{1}{2}$ (3) | $\frac{3}{4}$ (2) | $\frac{3}{4}$ (1) |
| | $\frac{1}{4}$ (9) | 4 (8) | $\frac{1}{8}$ (7) | $\frac{1}{2}$ (6) |
| $\frac{1}{\cos^2 a}$ (13) | $-\sin a$ (12) | $\cos a$ (11) | $-\frac{1}{2}$ (10) | |
| 1 (17) | $\frac{2}{\pi}$ (16) | $\frac{1}{2}$ (15) | $\frac{4}{10}$ (14) | $-\frac{1}{12}$ (18) |

זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\ \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2} \\ \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \pi n = 0 \\ \cos \pi n = (-1)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a \\ \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a \end{cases}$$

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}} \quad (13)$$

תשובות סופיות

| | | | |
|----------------|---------------|--------------|----------------|
| ϕ (4) | $-\infty$ (3) | ϕ (2) | ϕ (1) |
| ϕ (8) | ∞ (7) | ∞ (6) | $-\infty$ (5) |
| $-\infty$ (12) | ϕ (11) | 1 (10) | 0 (9) |
| | | | $-\infty$ (13) |

x שואף לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

- | | |
|--|---|
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{\frac{x+1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$ |

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^4} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^{10} (3x^2-1)^4}{x^2 (2x-5)^{10} (x^3+1)^2} \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(5 \cdot 2^{x+2} + 6 \cdot e^{x+1}) - x] \quad (29)$$

תשובות סופיות

| | | | |
|---|--------------------------------------|------------------------|--------------------|
| $-\infty$ (4) | 4 (3) | $-\frac{\pi}{2}$ (2) | 0 (1) |
| -1 (8) | 1 (7) | -5 (6) | 0 (5) |
| $\frac{1}{4}$ (12) | $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11) | 1.5 (10) | -3 (9) |
| 2 (16) | $\frac{1}{9}$ (15) | 4 (14) | 0 (13) |
| | 0 (19) | $e^{\frac{1}{3}}$ (18) | $\ln 3$ (17) |
| $-\infty: b=0, a < 0$: א. $\infty: b=0, a > 0$ א. $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}: b \neq 0$ א. (20) | | | |
| $-\frac{1}{2}$ (24) | $\frac{1}{2}$ (23) | $\frac{k}{2}$ (22) | 2.5 (21) |
| $\frac{5}{4}$ (28) | $\frac{3^4}{2^{10}}$ (27) | $\frac{a-b}{2}$ (26) | $\frac{1}{2}$ (25) |
| | | | $\ln(6e)$ (29) |