

מתמטיקה למנהל עסקים 6600

פרק 18 - חשבון דיפרנציאלי - בעיות קיצון

תוכן העניינים

1. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים.....1
2. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים.....3
3. בעיות קיצון שונות בפונקציות וגרפים.....7

בעיות קיצון יסודיות עם מספרים:

סיכום כללי:

שלבי עבודה:

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- x .
- נוודא שערך ה- x מהסעיף הקודם הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות " y (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

שאלות:

- (1) מבין כל זוגות המספרים שסכומם 14 מצא את הזוג שמכפלתו מקסימלית.
- (2) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצא מהם המספרים אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.
- (3) מצא את המספר החיובי שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו הסכום המתקבל יהיה מינימלי.
- (4) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
 - א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
 - ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?
 - ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?
- (5) x ו- y הם שני מספרים המקיימים: $x + 6y = 60$.
 - א. הבע את y באמצעות x .
 - ב. מה צריכים להיות המספרים x ו- y כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
 - ג. מהי המכפלה הנ"ל?

תשובות סופיות:

(1) $7, 7$

(2) $8, 8, 8$

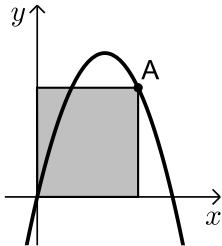
(3) 1

(4) א. $12, 12, 12$ ב. $8, 12, 16$ ג. מקרה א'.

(5) א. $y = 10 - \frac{x}{6}$ ב. $x = 30, y = 5$ ג. $M = 22500$.

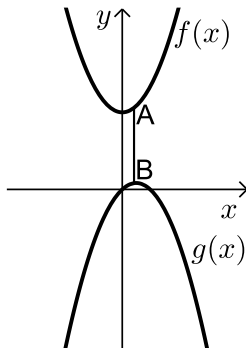
בעיות קיצון בפונקציות וגרפים:

שאלות:



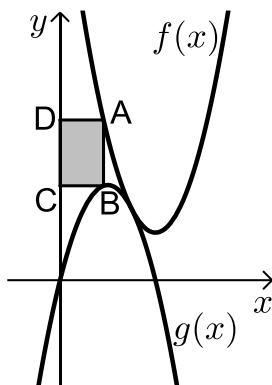
(23) נתונה הפונקציה $f(x) = 6x - x^2$.

מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



(24) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 + 12$ ו- $g(x) = 2x - x^2 - 1$.

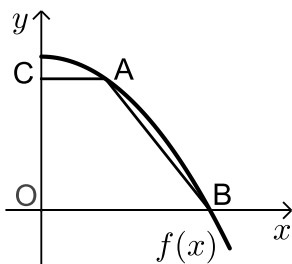
כמתואר: הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



(25) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

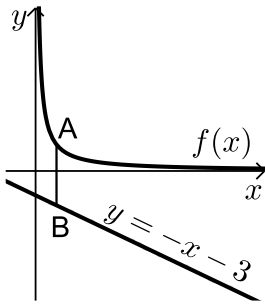
הפונקציות: $f(x) = x^2 - 8x + 18$ ו- $g(x) = -x^2 + 4x - 1$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- y כך שנוצר מלבן (המסומן). נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
 א. הבע באמצעות t את שטח המלבן המסומן.
 ב. מצא את ערכו של t עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.
 ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



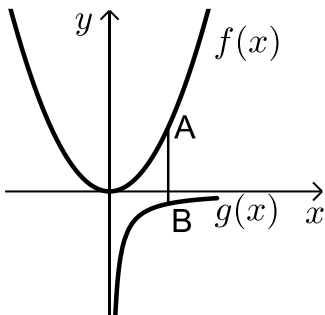
(26) נתונה הפונקציה: $f(x) = 36 - x^2$.

על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר המקביל לציר ה- x שחותך את ציר ה- y בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x ו-O ראשית הצירים.
 א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?
 ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?



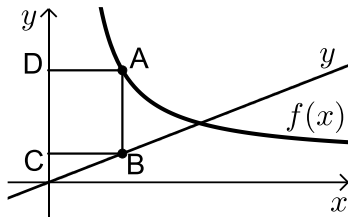
(27) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4}{x}$ ונתון הישר: $y = -x - 3$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הישר כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



(28) נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ו- $g(x) = -\frac{1}{x}$.

מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ונקודה B על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מצא את שיעורי הנקודות A ו-B עבור אורך הקטע AB מינימלי.



(29) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציה: $f(x) = \frac{x+8}{x-1}$ והישר: $y = \frac{9x}{25}$.

הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה- y כך שנוצר המלבן ABCD.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

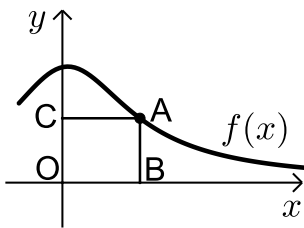
א. הבע באמצעות t את היקף המלבן ABCD.

ב. מצא את t עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?

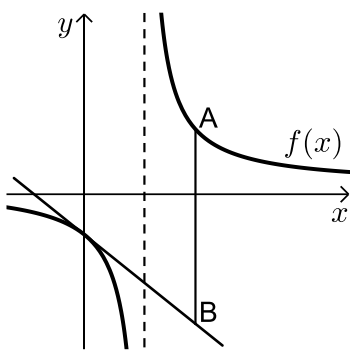
(30) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x-1}$ והישר $y = 2x$.

בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו מלבן. מצא את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.



(31) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+12}{x^2+3}$ בתחום: $x \geq 0$.

- מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABCO כמתואר באיור.
- א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.
- ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.



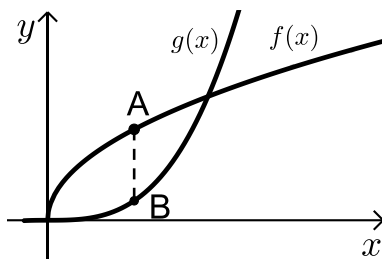
(32) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+10}{x-2}$.

- מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
- א. מצא את משוואת המשיק.
- מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה ברביע הראשון ו-B על גרף המשיק כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

- ב. מצא את שיעורי הנקודה A עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.
- ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

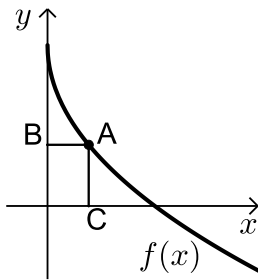
(33) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

- מצא שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.



(34) נתונות הפונקציות $f(x) = 2\sqrt{x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{3}x^3$.

- את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
- מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?



35 באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 6 - 3\sqrt{x}$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון.

מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים

אותם בנקודות B ו-C כמתואר באיור.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

א. הבע באמצעות t את סכום הקטעים $AC + AB$.

ב. מצא את ערכו של t עבורו סכום הקטעים הנ"ל

יהיה מינימלי.

36 נתונות הפונקציות: $f(x) = 1 - x^2$ ו- $g(x) = bx^2$ ($b > 0$).

הפונקציות נחתכות בנקודות A ו-B.

מצא את ערכו של b שבעבורו הקטע AO מינימלי (O – ראשית הצירים).

תשובות סופיות:

23 . A(4,8)

24 . A(0.5,12.25)

25 א. $S = 2t^3 - 12t^2 + 18t$ ב. $t = 1$ ג. $S = 8$

26 א. A(2,32) ב. $S = 128$

27 . A(2,2)

28 . A(1, 1/2), B(1,-1)

29 א. $P = \frac{1.28t^2 + 0.72t + 16}{t - 1}$ ב. $t = 4 \frac{3}{4}$ ג. $P = 12.88$ ס"מ

30 . 1.2

31 א. A(2,2) ב. A(0,4)

32 א. $y = -3x - 5$ ב. A(4,7) ג. $AB = 24$

33 . $(\sqrt{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}})$

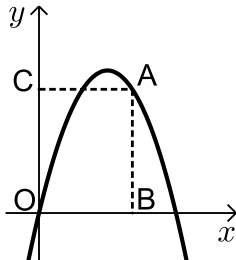
34 . A(1,2)

35 א. $l = t + 6 - 3\sqrt{t}$ ב. $t = 2.25$

36 . $b = 1$

בעיות קיצון שונות בפונקציות וגרפים:

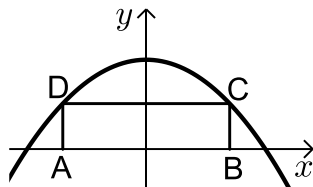
שאלות:



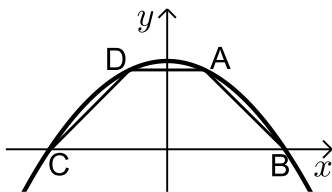
25) מנקודה A, הנמצאת על גרף הפונקציה $y = -x^2 + 5x$, מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן ABOC (ראה ציור).

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מקסימלי?

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מינימלי?



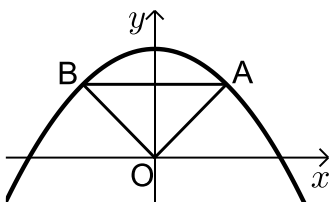
26) בפרבולה $y = 9 - x^2$ חוסמים מלבן ABCD, כך שהצלע AB מונחת על ציר ה- x (ראה ציור). מה צריך להיות אורך הצלע CD כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



27) טרפז ABCD חסום בין גרף הפרבולה $y = 9 - x^2$ לבין ציר ה- x (ראה ציור).

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABCD יהיה מקסימלי?

ב. חשב את השטח המקסימלי של טרפז ABCD.



28) נתונה הפרבולה $y = -x^2 + 12$.

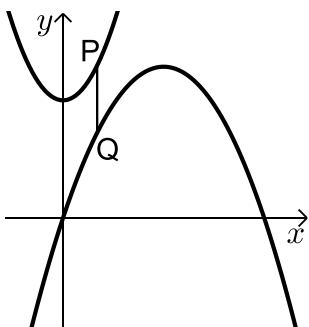
ישר המקביל לציר ה- x חותך את הפרבולה

בנקודות A ו-B (ראה ציור).

מחברים את הנקודות A ו-B עם ראשית הצירים, O.

א. מה צריך להיות אורך הקטע AB כדי ששטח המשולש AOB יהיה מקסימלי?

ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש AOB?

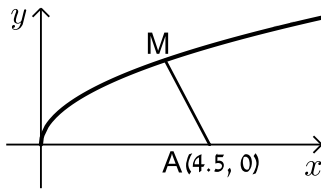


29) נתונים הגרפים של שתי פרבולות: $y = \frac{1}{2}x^2 + 7$ ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 1$.

קו מקביל לציר ה- y חותך את שתי הפרבולות

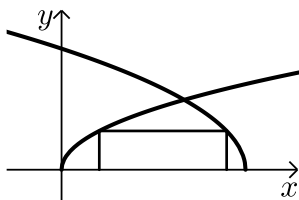
בנקודות P ו-Q (ראה ציור). מבין כל הקטעים המתקבלים

באופן זה, מצא את האורך המינימלי של הקטע PQ.

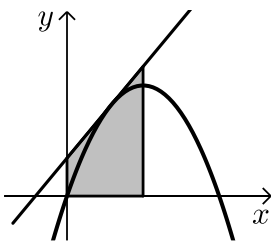


- (30)** נתון גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$.
 על ציר ה- x נתונה הנקודה $A(4.5, 0)$ (ראה ציור).
 מצא על גרף הפונקציה נקודה M , כך שריבוע המרחק AM יהיה מינימלי.

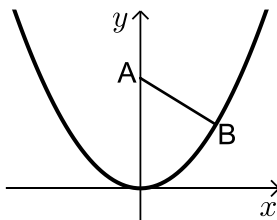
- (31)** מצא על הישר $y = 3x - 4$ את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $(0, 1)$.



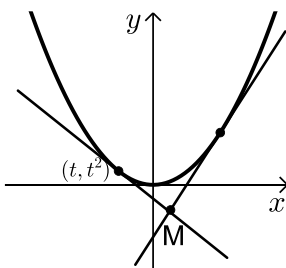
- (32)** בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \sqrt{3x}$, $g(x) = \sqrt{36-6x}$.
 מלבן חסום בין הגרפים של הפונקציות ובין ציר ה- x , כמתואר בציור.
 מצא את השטח הגדול ביותר האפשרי למלבן שחסום באופן זה.



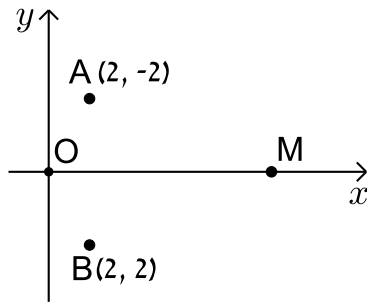
- (33)** דרך איזו נקודה על הפרבולה $y = -x^2 + 2x$ צריך להעביר משיק, כדי ששטח הטרפז, הנוצר על ידי המשיק והישרים: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ (השטח המסומן שבציור) יהיה מינימלי?



- (34)** נקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $y = x^2$ ברביע הראשון. A היא הנקודה $(0, a)$ כאשר ידוע כי $a > 0.5$ (ראה ציור).
 א. בטא באמצעות a את שיעורי הנקודה B , שעבורה המרחק AB הוא מינימלי.
 ב. מצא עבור איזה ערך של a המרחק המינימלי הוא 2.



- (35)** נתונה הפרבולה $y = x^2$, ונתון משיק לפרבולה שמשוואתו היא $y = 6x - 9$. בנקודה (t, t^2) שעל הפרבולה מעבירים משיק נוסף לפרבולה.
 המשיקים נחתכים בנקודה M (ראה ציור).
 א. הבע את משוואת המשיק הנוסף באמצעות t .
 ב. מצא את t שעבורו אורך הקטע, המחבר את הנקודה M עם קדקוד הפרבולה יהיה מינימלי.



- (36)** במערכת צירים נתונות הנקודות $A(2, 2)$ ו- $B(2, -2)$.
 ראשית הצירים היא בנקודה O . M היא נקודה על
 ציר ה- x בתחום $x > 0$.
 מה צריכים להיות שיעורי הנקודה M ,
 כדי שהסכום: $OM + MA + MB$ יהיה מינימלי?

תשובות סופיות:

ב. $A(0, 0)$ או $A(5, 0)$.

ב. 32.

ב. $S_{\triangle AOB} = 16$.

ב. 4.25.

ב. $t = -\frac{3}{37}$.

א. $A(3, 6)$ (25)

$CD = 2\sqrt{3}$ (26)

א. $A(1, 8)$ (27)

א. $AB = 4$ (28)

$PQ = 4$ (29)

$M(4, 2)$ (30)

$(1.5, 0.5)$ (31)

8 (32)

$(0.5, 0.75)$ (33)

א. $B\left(\sqrt{\frac{2a-1}{2}}, \frac{2a-1}{2}\right)$ (34)

א. $y = 2xt - t^2$ (35)

$M(0.845, 0)$ (36)