

מבחן פטור במתמטיקה

פרק 28 - חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה

תוכן העניינים

1. פונקציה מעריכית 1
2. פונקציה לוגריתמית 7

פונקציה מעריכית:

סיכום כללי:

אינטגרלים מיידיים של פונקציות מעריכיות:

אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$

שאלות:

אינטגרל כללי:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int (5e^x - e^{3x} + e^{-x} + 1) dx$

ג. $\int (6\sqrt{e^{4x-1}}) dx$

ב. $\int (3^x + 5^{2x}) dx$

ד. $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx$

ב. $\int \frac{3e^{3x} - 5e^{2x} + 4e^x - 2}{e^x - 1} dx$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int (e^{4x} + e^{-x}) dx$

ג. $\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$

ב. $\int (e^{x+1})^2 dx$

ד. $\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx$

(4) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \left(\frac{e^x}{\sqrt{e^x + 3}} \right) dx \quad \text{ב. } \int \left(\frac{3 - e^x}{(e^x - 3x)^2} \right) dx \quad \text{ג. } \int (xe^{x^2}) dx$$

אינטגרל מסוים:

(5) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2e^x - \frac{1}{e^x}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(\ln 2, 3\frac{1}{4}\right)$.

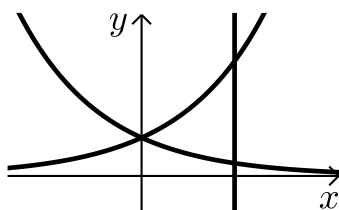
(6) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = e^{2x} + e^x - 2$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא $\frac{1}{2}$.

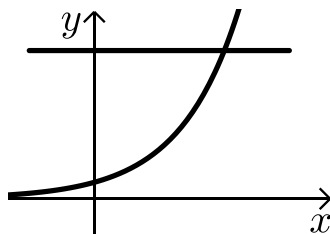
(7) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 6x^2 e^{x^3} - \frac{1}{x^2}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(-1, \frac{2}{e}\right)$.

חישובי שטחים:

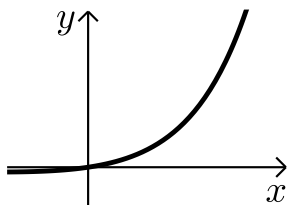


(8) נתונות הפונקציות: $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$.

מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לישר $x = \ln 3$.

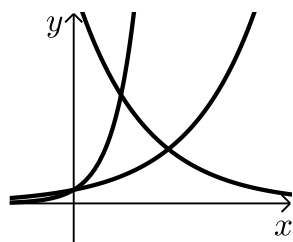
(9) נתונה הפונקציה: $f(x) = 3^x$.

מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר $y = 9$ וציר ה- y .



(10) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{2x} - e^x$.

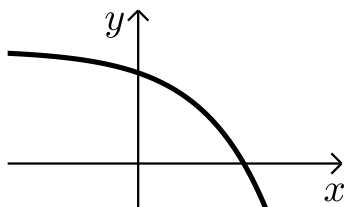
לפונקציה העבירו משיק בראשית הצירים.
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
המשיק והישר $x = 2$.



(11) נתונות הפונקציות:

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{3x}, \quad h(x) = 16e^{-x}$$

חשב את גודל השטח הכלוא שבין שלוש הפונקציות.



(12) נתונה הפונקציה: $f(x) = 5 - e^x$.

העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין
הפונקציה, המשיק וציר ה- x .
ניתן להשאיר e ו- $\ln$ בתשובה.

(13) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{bx}$, $(0 < b)$.

גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר

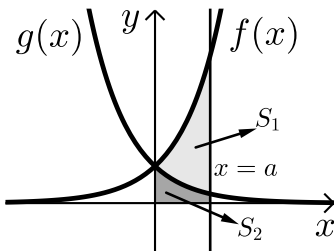
$$\text{בראשית הצירים וציר ה-} y \text{ הוא } \frac{e-2}{4}.$$

מצא את ערכו של הפרמטר b .

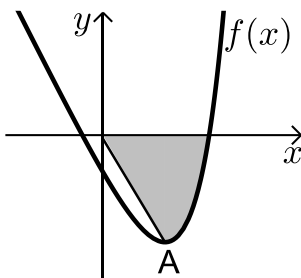
(14) נתונות הפונקציות: $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$, $g(x) = e^{-x}$.

מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני
הצירים. המשך האנך לציר ה- y חותך את הפונקציה $f(x)$ ומנקודת החיתוך
יורד אנך נוסף לציר ה- x כך שנוצר מלבן.

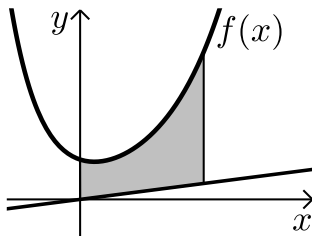
הוכח כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.



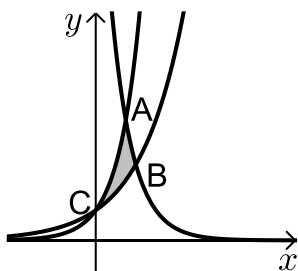
- 15** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = e^{2x}$ ו- $g(x) = e^{-2x}$. מעבירים אנך לציר ה- x את הישר $x = a$, $a > 0$, כמתואר באיור. אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו- S_2 . ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2 . מצא את a .



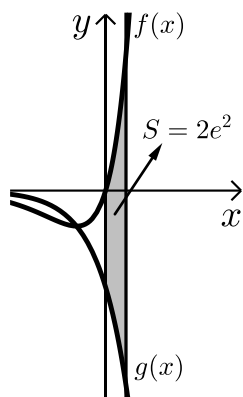
- 16** נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$. הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה. א. מצא את שיעורי הנקודה A. מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים. ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית. ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 1.7$.



- 17** נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$. ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה: $\left(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2}\right)$. א. מצא את a וכתוב את הפונקציה. ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והישר: $y = 0.1x$. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר y והאנך: $x = 2$.



- 18** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של שלוש פונקציות: I. $f(x) = 2^x$. II. $g(x) = 4^x$. II. $h(x) = 2^{4-2x}$. א. קבע איזה גרף מתאר כל פונקציה. ב. מצא את שיעורי הנקודות A, B ו- C. (נקודות החיתוך שבין הגרפים). ג. חשב את השטח המסומן באיור.



19 ענה על הסעיפים הבאים:

א. גזור את הפונקציה הבאה: $y = e^x(x-1)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציות: $f(x) = xe^x$, $g(x) = -e^x$.

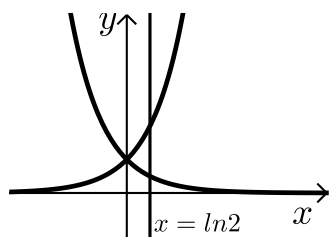
מעבירים ישר $x = a$ ($a > 0$) החותך את הגרפים

של שתי הפונקציות ויוצר את השטח המתואר

הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- y והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$. מצא את a .

חישובי נפחים:



20 נתונות הפונקציות: $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$.

השטח הכלוא בין הפונקציות והישר: $x = \ln 2$

מסתובב סביב ציר ה- x .

חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

תשובות סופיות:

- (1) א. $5e^x - \frac{e^{3x}}{3} - e^{-x} + x + c$ ב. $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + c$ ג. $3e^{2x-\frac{1}{2}} + c$ ד. $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + c$
- (2) א. $e^x + x + c$ ב. $\frac{3e^{2x}}{2} - 2e^x + 2x + c$
- (3) א. $\frac{1}{4}e^{4x} - e^{-x} + c$ ב. $\frac{1}{2}e^{2x+2} + c$ ג. $\frac{0.4^x}{\ln 0.4} + \frac{3.2^x}{\ln 3.2} + \frac{200^x}{\ln 200} + c$ ד. $8\sqrt{e^x} - \frac{3}{4}e^{\frac{-4x}{3}} + c$
- (4) א. $2\sqrt{e^x+3} + c$ ב. $\frac{1}{e^x-3x} + c$ ג. $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$
- (5) $f(x) = 2e^x + e^{-x} - 1.25$
- (6) $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x - 2x - 1$
- (7) $f(x) = 2e^{x^3} + \frac{1}{x} + 1$
- (8) $S = 1\frac{1}{3}$ יח"ש
- (9) $S = 10.72$ יח"ש
- (10) $S = 18.41$ יח"ש
- (11) $S = 3\frac{1}{3}$ יח"ש
- (12) $S = 0.192$ יח"ש
- (13) $b = 2$
- (15) $a = \ln 2$
- (16) א. $A(1, -e-2)$ ב. $y = -(e+2)x$ ג. $S = 4.744$ יח"ש
- (17) א. $a = -2$, $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}$ ב. 1.52
- (18) א. $A(1, 4)$, $B(1\frac{1}{3}, 2.52)$, $C(0, 1)$ ב. $S = 1.03$ יח"ש
- (19) א. $y' = xe^x$ ב. $a = 2$
- (20) $1\frac{1}{8}\pi$ יח"ש

פונקציה לוגריתמית:

סיכום כללי:

אינטגרלים מיידיים של פונקציות לוגריתמיות:

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$

שאלות:

אינטגרל כללי:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{3x-1} \right) dx \quad \text{ב. } \int \frac{x^2+3x-4}{x} dx \quad \text{ג. } \int \frac{x+3}{x^2-9} dx$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \frac{x^2+3x+5}{x+1} dx \quad \text{ב. } \int \frac{x^3-x^2+5x-6}{x-2} dx \quad \text{ג. } \int \frac{x^4+3}{x+1} dx$$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{lll} \text{א. } \int \frac{2x}{x^2-3} dx & \text{ב. } \int \frac{x-1}{x^2-2x} dx & \text{ג. } \int \frac{e^x}{e^x+5} dx \\ \text{ד. } \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx & \text{ה. } \int \frac{\cos x}{\sin x} dx & \end{array}$$

אינטגרל מסוים:

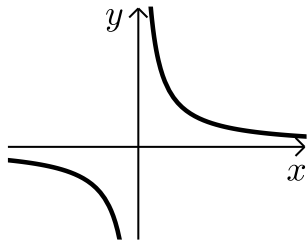
(4) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - \frac{1}{x-4}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה (5, 28).

(5) נתונה נגזרת שנייה של פונקציה: $f''(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$. מצא את הפונקציה אם

ידוע שהיא עוברת בנקודה $(1, -2)$ וששיפועה בנקודה זו הוא 3.

חישובי שטחים:

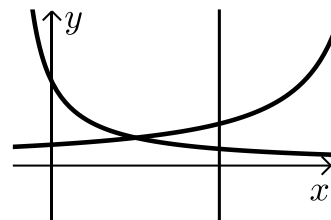


(6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

הישרים $x = -1$ ו- $x = -4$ וציר ה- x .

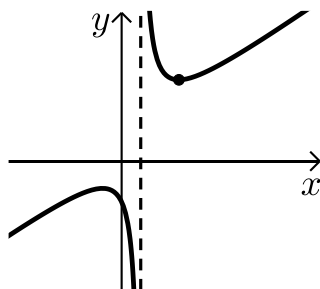
ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.



(7) נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{2}{x+1}$, $f(x) = \frac{4}{8-x}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר $x = 4$ והצירים.



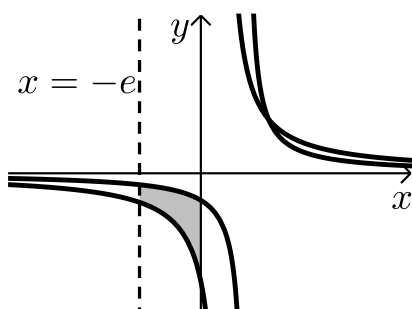
(8) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 2$ ואנך לציר

ה- x העובר בנקודת המינימום של הפונקציה.

אפשר להשאיר ביטוי עם $\ln$ בתשובה.



(9) באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{a}{x-1}$

ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$ בתחום: $x < 0$.

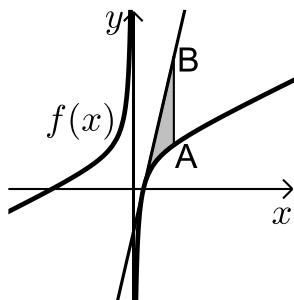
ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים

בנקודה שבה $x = 3$.

א. מצא את a וכתוב את שתי הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של

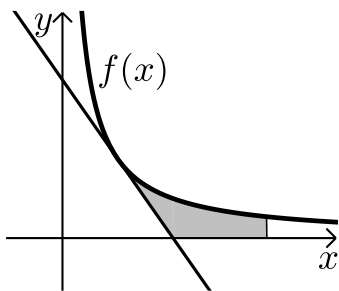
שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x = -e$.



(10) נתונה הפונקציה: $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$.

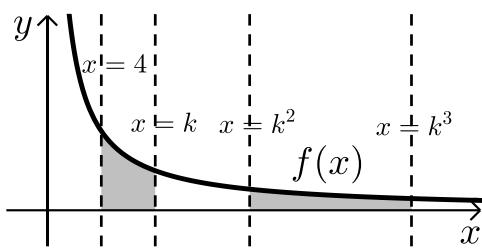
ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה
בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x היא: $y = 18x - 9$.
א. מצא את a ו- b וכתוב את הפונקציה.
מעבירים ישר המקביל לציר ה- y שחותך את גרף
הפונקציה בנקודה A ואת משוואת המשיק בנקודה B.
אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצא את משוואת הישר הנ"ל אם ידוע כי הנקודה A
נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



(11) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה
שבה: $x = 2$ היא: $y = 4 - x$.
א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
ב. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$
והמשיק בתחום: $x > 0$.
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק,
ציר ה- x והישר $x = e^2$.



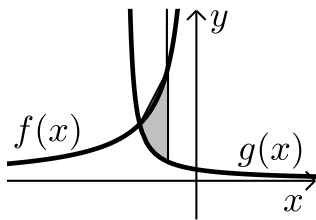
(12) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{x}$.

בתחום: $x > 0$. מעבירים את הישרים:

$$x = 4, x = k, x = k^2, x = k^3$$

כמתואר $x > 4$.

א. הבע באמצעות k את השטחים S_1 ו- S_2 .
ב. הראה כי ההפרש: $S_2 - S_1$ אינו תלוי ב- k וחשב את ערכו.
ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1 . מצא את k .



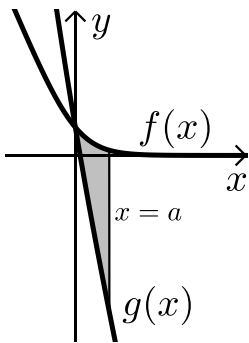
13 נתונות הפונקציות: $f(x) = -\frac{4}{x}$ ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$.

גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 0.4$.

א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x = -1$.



14 באיור מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \ln(e^{-x} + 1) \text{ ו- } g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$$

בתחום: $(x \geq 0)$.

א. הראה כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y .

ב. מעבירים ישר $x = a$, $(a > 1)$ המאונך

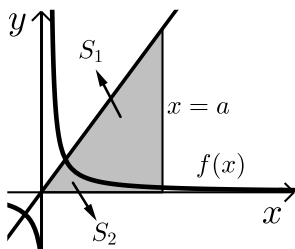
לציר ה- x אשר חותך את הגרפים של שתי

הפונקציות ויוצר את השטח S (ראה איור).

מצא את ערכו של a עבורו מתקיים: $S = 4$.

15 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{3x-1}$ והישר: $y = x$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות הנמצאת ברביע הראשון.



מעבירים אנך לציר ה- x - $x = a$ הנמצא מימין

לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

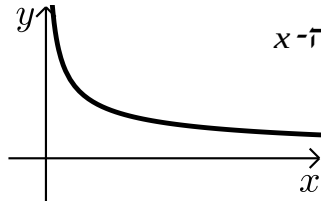
האנך החותך את הגרפים ויוצר את השטחים S_1 ו- S_2 המתוארים האיור.

ב. מצא את הערך של a עבורו השטח S_2 יהיה שווה ל- $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7$.

ג. עבור ערך ה- a שמצאת בסעיף הקודם חשב את יחס השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.

חישובי נפחים:

(16) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.



השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=1$ ו- $x=3$ וציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x .
מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר באופן זה.
אפשר להשאיר $\ln$ בתשובה.

(17) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הצירים והישר $x = \ln \sqrt{3}$ מסתובב סביב ציר ה- x . חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

(18) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=a$ ו- $x=a+3$, ($a > 0$) וציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x .
חשב את נפח גוף הסיבוב המינימלי שנוצר באופן הזה.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 3\ln|x| + 2\ln|x+1| - \frac{4\ln|3x-1|}{3} + c \quad \text{ב. } \frac{x^2}{2} + 3x - 4\ln|x| + c \quad \text{ג. } \ln|x-3| + c$$

$$(2) \quad \text{א. } \frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x+1| + c \quad \text{ב. } \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 7x + 8\ln|x-2| + c$$

$$\text{ג. } \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + 4\ln|x+1| + c$$

$$(3) \quad \text{א. } \ln|x^2-3| + c \quad \text{ב. } \frac{1}{2}\ln|x^2-2x| + c \quad \text{ג. } \ln|e^x+5| + c$$

$$\text{ד. } \ln|e^x+e^{-x}| + c \quad \text{ה. } \ln|\sin x| + c$$

$$(4) \quad f(x) = x^2 - \ln|x-4| + 3$$

$$(5) \quad f(x) = x^3 + \ln|x| - x - 2$$

$$(6) \quad S = \ln 4 \text{ יח"ש}$$

$$(7) \quad S = 2.17 \text{ יח"ש}$$

$$(8) \quad S = 4\ln 2 - 2 \text{ יח"ש}$$

$$(9) \quad \text{א. } a=2, \quad g(x) = \frac{1}{x-2}, \quad f(x) = \frac{2}{x-1} \quad \text{ב. } 1.76 \text{ יח"ש } S$$

$$(10) \quad \text{א. } a=2, \quad b=-4, \quad f(x) = 7 + 2x - \frac{4}{x} \quad \text{ב. } x=2$$

$$\text{ג. } S = 6 + \ln 256 \approx 11.54 \text{ יח"ש}$$

$$(11) \quad \text{א. } f(x) = \frac{4}{x} \quad \text{ב. } S = 6 - 4\ln 2 \text{ יח"ש}$$

$$(12) \quad \text{א. } S_2 = 2\ln k - \ln 16, \quad S_1 = 2\ln k \quad \text{ב. } S_2 - S_1 = \ln 16 \quad \text{ג. } k=8$$

$$(13) \quad \text{א. } g(x) = \frac{2}{2x+5} \quad \text{ב. } (-2, 2) \quad \text{ג. } \ln 5 \frac{1}{3} \approx 1.674 \text{ יח"ש } S$$

$$(14) \quad \text{ב. } a=2$$

$$(15) \quad \text{א. } (1, 1) \quad \text{ב. } a=5 \quad \text{ג. } \frac{S_1}{S_2} = 5.955$$

$$(16) \quad V = \pi \ln 3 \text{ יח"נ}$$

$$(17) \quad V = \frac{\pi}{2} \ln 2 \text{ יח"נ}$$

$$(18) \quad V = \pi \left(19 \frac{1}{2} + 4\ln 4 \right) \text{ יח"נ}$$