

# סדנת ריענון במתמטיקה

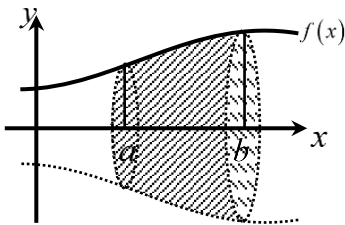
פרק 52 - חשבון אינטגרלי - חישובי נפחים של גופים ובעיות קיצון עם אינטגרלים

תוכן העניינים

1. חישוב נפחים באמצעות האינטגרל..... 1
2. בעיות קיצון עם אינטגרלים..... 6

## חישוב נפחים באמצעות האינטגרל:

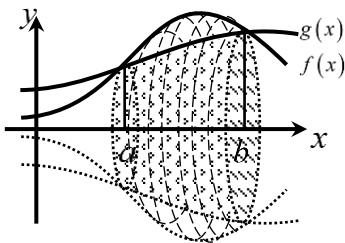
### סיכום כללי:



- נפח הגוף שנוצר עקב סיבוב הפונקציה  $f(x)$  סביב ציר ה- $x$  בגבולות  $x=a$  ו- $x=b$  נתון ע"י האינטגרל

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

הבא:

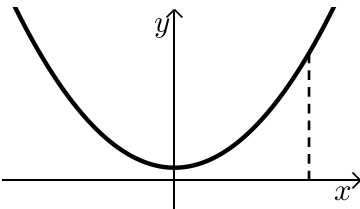


- בפרט עבור גוף הנוצר ע"י בסיס שטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  נקבל את

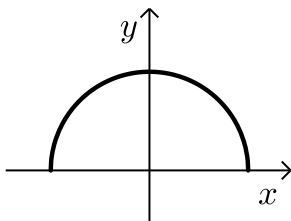
$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$$

הנוסחה הבאה:

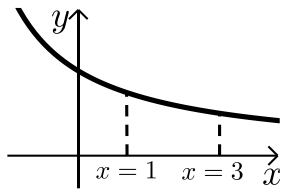
### שאלות:



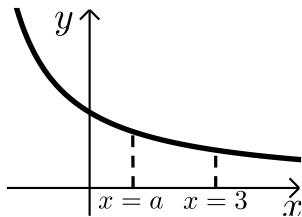
- נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^2 + 1$ .  
 השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר  $x=3$  והצירים מסתובב סביב ציר ה- $x$ .  
 חשב את נפח גוף הסיבוב המתקבל באופן זה.



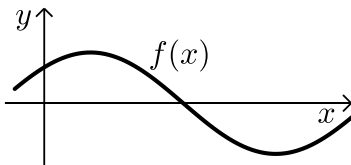
- באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ .  
 א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ב. חשב את נפח הגוף שנוצר ע"י סיבוב גרף הפונקציה סביב ציר ה- $x$ .



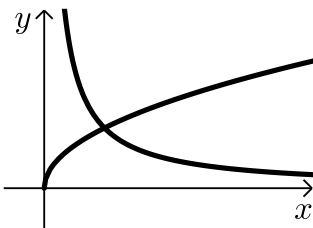
- (3) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{12}{x+3}$  בתחום:  $x \geq 0$ .  
 גרף הפונקציה מסתובב סביב ציר ה- $x$ .  
 מסמנים את נפח הגוף שנוצר בין הגבולות  $0 \leq x \leq 1$   
 ב- $V_1$  ואת נפח הגוף שנוצר בתחום:  $1 \leq x \leq 3$  ב- $V_2$ .  
 חשב את היחס:  $\frac{V_1}{V_2}$ .



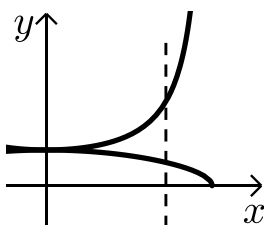
- (4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{12}{x+3}$  בתחום:  $x \geq 0$ .  
 גרף הפונקציה מסתובב סביב ציר ה- $x$ .  
 מסמנים את נפח הגוף הנוצר בין הגבולות  $0 \leq x \leq a$   
 ב- $V_1$  ואת נפח הגוף שנוצר בתחום:  $a \leq x \leq 3$  ב- $V_2$ .  
 מתקיים:  $V_1 = V_2$ . מצא את  $a$ .



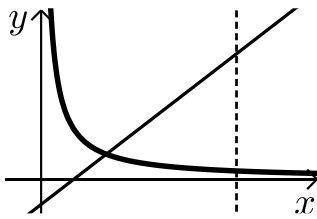
- (5) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sin x + \cos x$  בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .  
 השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים ברביע הראשון  
 מסתובב סביב ציר ה- $x$ .  
 מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.



- (6) בשרטוט נתונות הפונקציות ברביע  
 הראשון:  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$ .  
 מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר, כאשר השטח הכלוא  
 בין הפונקציות והישר  $x=2$  מסתובב סביב ציר ה- $x$ .



- (7) נתונות הפונקציות:  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ ,  $g(x) = \sqrt{\cos x}$ .  
 השטח הכלוא בין הפונקציות לישר  $x = \frac{\pi}{6}$   
 מסתובב סביב ציר ה- $x$ .  
 חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

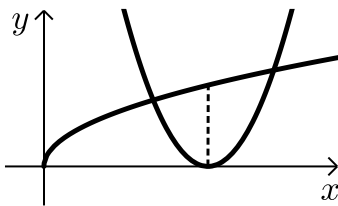


8) חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר כאשר השטח המוגבל

בין הגרפים של פונקציות:  $g(x) = 2x - 1$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$

ציר ה- $x$  והישר  $x = 3$  מסתובב סביב ציר ה- $x$ .

9) נתונים הגרפים של הפונקציות:  $g(x) = (2x - 3)^2 - 1$  ו-  $f(x) = \sqrt{x}$



א. הראה כי הפונקציות נפגשות בנקודה שבה  $x = 1$ .

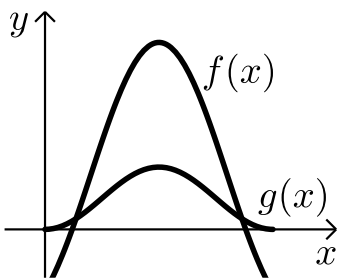
ב. השטח הכלוא בין הפונקציות ונמצא משמאל

לאורך ציר ה- $x$ , היוצא מקודקוד הפרבולה  $g(x)$

מסתובב סביב ציר ה- $x$ .

מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

10) ענה על השאלות הבאות:



א. הוכח את הזהות:  $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$ .

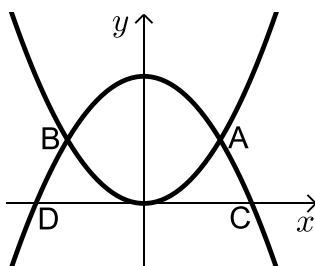
ב. נתונות הפונקציות:  $f(x) = 2\sin x - \cos 2x$

ו-  $g(x) = 2\sin^2 x$  בתחום  $[0; \pi]$ .

השטח הכלוא בין גרפים של שתי הפונקציות

בתחום הנתון מסתובב סביב ציר ה- $x$ .

חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.



11) הפונקציות:  $f(x) = x^2$  ו-  $g(x) = 8 - x^2$

נחתכות בנקודות A ו-B כמתואר באיור.

נסמן את נקודות החיתוך של גרף

הפונקציה  $g(x)$  עם ציר ה- $x$  ב-C ו-D.

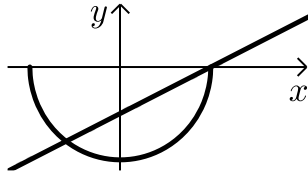
א. מצא את שיעורי הנקודות A, B, C ו-D.

ב. השטח הנוצר בין הגרפים של שתי הפונקציות מסתובב סביב ציר ה- $x$ .

מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

ג. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות וציר ה- $x$  מסתובב סביב ציר ה- $x$ .

מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר באופן זה.

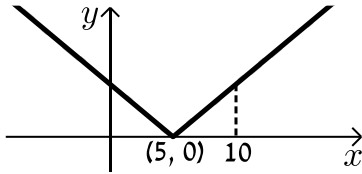


**12** חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר ע"י סיבוב

השטח הכלוא בין הגרפים של

$$g(x) = -2\sqrt{25-x^2} \text{ ו- } f(x) = x-5$$

וציר ה- $x$  סביב ציר ה- $x$ .



**13** לפניך גרף הפונקציה:  $f(x) = |x-5|$ .

א. חשב את נפח הגוף שנוצר כאשר השטח בין גרף

הפונקציה בתחום  $0 \leq x \leq 10$  ובין ציר ה- $x$

מסתובב סביב ציר ה- $x$ .

ב. האם תוצאת החישוב של הסעיף הקודם

תשתנה אם במקום  $f(x) = |x-5|$  נשתמש

בפונקציה  $g(x) = x-5$ ? נמק.

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad V = 69\frac{3}{5}\pi \text{ יח"ינ}$$

$$(2) \quad \text{א. } (2,0), (-2,0) \quad \text{ב. } V = 10\frac{2}{3}\pi \text{ יח"ינ}$$

$$(3) \quad \frac{V_1}{V_2} = 1$$

$$(4) \quad a = 1$$

$$(5) \quad V = \frac{1}{2}\pi + \frac{3\pi^2}{4} \approx 8.97 \text{ יח"ינ}$$

$$(6) \quad V = \pi \text{ יח"ינ}$$

$$(7) \quad V = 0.243 \text{ יח"ינ}$$

$$(8) \quad V = \frac{5}{6}\pi \text{ יח"ינ}$$

$$(9) \quad V = \frac{21}{40}\pi \text{ יח"ינ}$$

$$(10) \quad \text{א. שימוש בזהות של } \sin(\alpha + \beta) \text{ ייתן את המבוקש.}$$

$$\text{ב. } V = 17.46 \text{ יח"ינ}$$

$$(11) \quad \text{א. } A(2,4), B(-2,4), C(\sqrt{8},0), D(-8,0)$$

$$\text{ב. } V = 170\frac{2}{3}\pi \text{ יח"ינ} \quad \text{ג. } V = 22.42\pi \text{ יח"ינ}$$

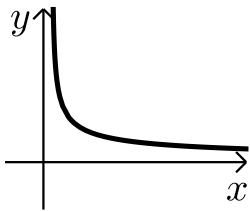
$$(12) \quad V = 240\pi \text{ יח"ינ}$$

$$(13) \quad \text{א. } V = 83\frac{1}{3}\pi \text{ יח"ינ} \quad \text{ב. לא.}$$

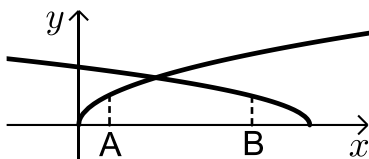
## בעיות קיצון עם אינטגרלים:

### שאלות:

(1) מצא את ערכו של  $a$  שבעבורו ערך האינטגרל  $\int_a^{2a+1} (2x-1) dx$  מינימלי.



(2) בשרטוט נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{b-1}{\sqrt{x-1}}$ ,  $(1 < b < 2)$ .  
לאיזה ערך של  $b$  השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים  $x=b$  ו- $x=2$  וציר ה- $x$  מקסימלי?



(3) בשרטוט נתונות הפונקציות:  $f(x) = \sqrt{2x}$ ,  $g(x) = \sqrt{6-x}$ .  
מהנקודות A ו-B, הנמצאות על ציר ה- $x$  והמרחק ביניהן הוא 2, העלו אנכים לציר ה- $x$ .  
השטח הכלוא בין האנכים, שתי הפונקציות וציר ה- $x$  מסתובב סביב ציר ה- $x$ .  
מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שנפח גוף הסיבוב המתקבל באופן זה יהיה מקסימלי.

### תשובות סופיות:

$$a = -\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$b = 1\frac{4}{9} \quad (2)$$

$$A\left(1\frac{1}{3}, 0\right) \quad (3)$$