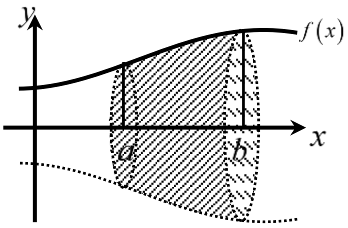
מכינה במתמטיקה

פרק 59 - חשבון אינטגרלי - חישובי נפחים של גופים ובעיות קיצון עם אינטגרלים

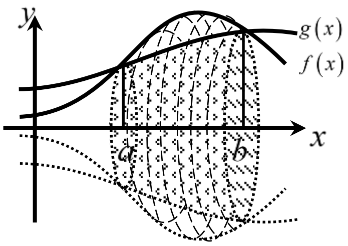
תוכן העניינים

חישוב נפחים באמצעות האינטגרל:

סיכום כללי:

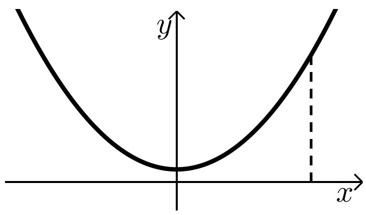


- נפח הגוף שנוצר עקב סיבוב הפונקציה $f(x)$ סביב ציר ה-x בגבולות: $x=a$ ו-$x=b$ נתון ע״י האינטגרל הבא: $\boxed{V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx}$.

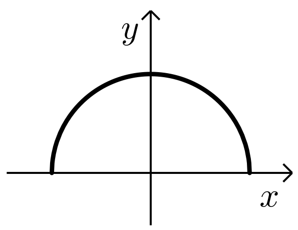


- בפרט עבור גוף הנוצר ע״י בסיס שטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ נקבל את הנוסחה הבאה: $\boxed{V=\pi\int_a^b \left[(f(x))^2-(g(x))^2\right]dx}$.

שאלות:



1) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2+1$.
השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר $x=3$ והצירים מסתובב סביב ציר ה-x.
חשב את נפח גוף הסיבוב המתקבל באופן זה.

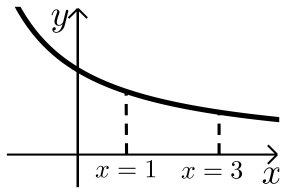


2) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

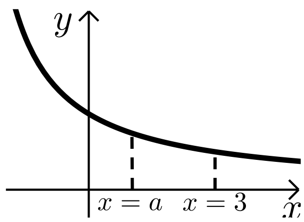
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

ב. חשב את נפח הגוף שנוצר ע״י סיבוב גרף הפונקציה סביב ציר ה-x.

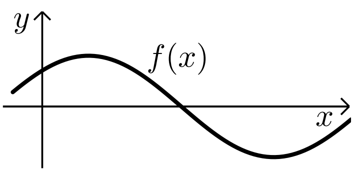
3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{12}{x+3}$ בתחום: $x\ge 0$.
גרף הפונקציה מסתובב סביב ציר ה- x.
מסמנים את נפח הגוף שנוצר בין הגבולות $0\le x\le 1$
ב- V_1 ואת נפח הגוף שנוצר בתחום: $1\le x\le 3$ ב- V_2.
חשב את היחס: $\frac{V_1}{V_2}$.



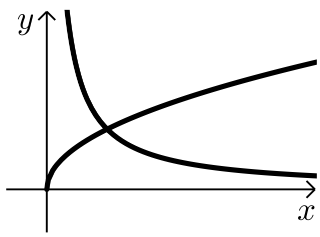
4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{12}{x+3}$ בתחום: $x\ge 0$.
גרף הפונקציה מסתובב סביב ציר ה- x.
מסמנים את נפח הגוף הנוצר בין הגבולות $0\le x\le a$
ב- V_1 ואת נפח הגוף שנוצר בתחום: $a\le x\le 3$ ב- V_2.
מתקיים: $V_1=V_2$. מצא את a.



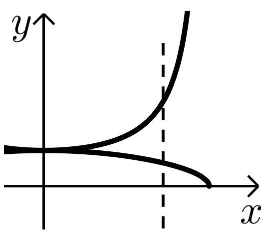
5) נתונה הפונקציה $f(x)=\sin x+\cos x$ בתחום: $0\le x\le 2\pi$.
השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים ברביע הראשון
מסתובב סביב ציר ה- x.
מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.



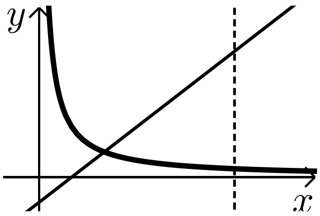
6) בשרטוט נתונות הפונקציות ברביע
הראשון: $g(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)=\sqrt{x}$.
מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר, כאשר השטח הכלוא
בין הפונקציות והישר $x=2$ מסתובב סביב ציר ה- x.



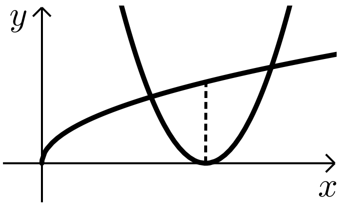
7) נתונות הפונקציות: $g(x)=\sqrt{\cos x}$, $f(x)=\frac{1}{\cos x}$.
השטח הכלוא בין הפונקציות לישר $x=\frac{\pi}{6}$
מסתובב סביב ציר ה- x.
חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.



8) חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר כאשר השטח המוגבל בין הגרפים של פונקציות: $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=2x-1$, ציר ה-x והישר $x=3$ מסתובב סביב ציר ה-x.



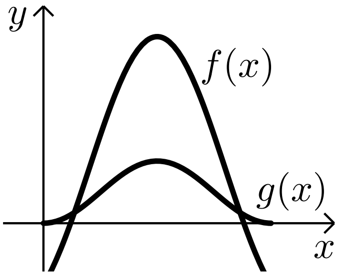
9) נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\sqrt{x}$ ו- $g(x)=(2x-3)^2$.



א. הראה כי הפונקציות נפגשות בנקודה שבה $x=1$.

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות ונמצא משמאל לאנך לציר ה-x, היוצא מקודקוד הפרבולה $g(x)$ מסתובב סביב ציר ה-x. מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

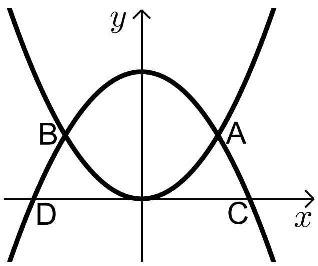
10) ענה על השאלות הבאות:



א. הוכח את הזהות: $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

ב. נתונות הפונקציות: $f(x)=2\sin x-\cos 2x$ ו- $g(x)=2\sin^2 x$ בתחום $[0:\pi]$.
השטח הכלוא בין גרפים של שתי הפונקציות בתחום הנתון מסתובב סביב ציר ה-x.
חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

11) הפונקציות: $f(x)=x^2$ ו- $g(x)=8-x^2$ נחתכות בנקודות A ו-B כמתואר באיור.
נסמן את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה-x ב-C ו-D.

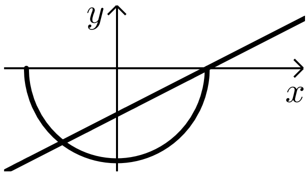


א. מצא את שיעורי הנקודות A, B, C ו-D.

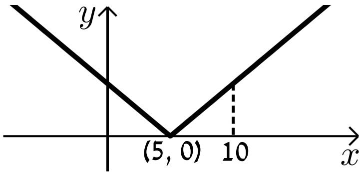
ב. השטח הנוצר בין הגרפים של שתי הפונקציות מסתובב סביב ציר ה-x.
מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

ג. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות וציר ה-x מסתובב סביב ציר ה-x.
מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר באופן זה.

12) חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר ע"י סיבוב השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות $f(x)=x-5$ ו- $g(x)=-2\sqrt{25-x^2}$ וציר ה- x סביב ציר ה- x.



13) לפניך גרף הפונקציה: $f(x)=|x-5|$.



א. חשב את נפח הגוף שנוצר כאשר השטח בין גרף הפונקציה בתחום $0\le x\le 10$ ובין ציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x.

ב. האם תוצאת החישוב של הסעיף הקודם תשתנה אם במקום $f(x)=|x-5|$ נשתמש בפונקציה $g(x)=x-5$? נמק.

תשובות סופיות:

1) $69\frac{3}{5}\pi$ יח"נ $= V$.

2) א. $(2,0)$, $(-2,0)$. ב. $10\frac{2}{3}\pi$ יח"נ $= V$.

3) $\frac{V_1}{V_2}=1$.

4) $a=1$.

5) $\frac{1}{2}\pi+\frac{3\pi^2}{4}\approx 8.97$ יח"נ $= V$.

6) π יח"נ $= V$.

7) 0.243 יח"נ $= V$.

8) $\frac{5}{6}\pi$ יח"נ $= V$.

9) $\frac{21}{40}\pi$ יח"נ $= V$.

10) א. שימוש בזהות של $\sin(\alpha+\beta)$ ייתן את המבוקש.
ב. 17.46 יח"נ $= V$.

11) א. $A(2,4)$, $B(-2,4)$, $C(\sqrt{8},0)$, $D(-8,0)$.
ב. $170\frac{2}{3}\pi$ יח"נ $= V$. ג. 22.42π יח"נ $= V$.

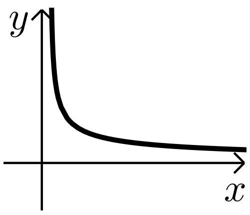
12) 240π יח"נ $= V$.

13) א. $83\frac{1}{3}\pi$ יח"נ $= V$ ב. לא.

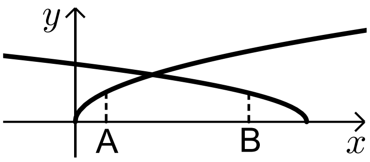
בעיות קיצון עם אינטגרלים:

שאלות:

1) מצא את ערכו של a שבעבורו ערך האינטגרל $\int_{a}^{2a+1}(2x-1)\,dx$ מינימלי.



2) בשרטוט נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{b-1}{\sqrt{x-1}}$, $(1<b<2)$.
לאיזה ערך של b השטח הכלוא בין הפונקציה,
הישרים $x=b$ ו- $x=2$ וציר ה- x מקסימלי?



3) בשרטוט נתונות הפונקציות: $f(x)=\sqrt{2x}$, $g(x)=\sqrt{6-x}$
מהנקודות A ו-B, הנמצאות על ציר ה- x והמרחק
ביניהן הוא 2, העלו אנכים לציר ה- x.
השטח הכלוא בין האנכים, שתי הפונקציות וציר ה- x
מסתובב סביב ציר ה- x.
מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A
כדי שנפח גוף הסיבוב המתקבל באופן זה יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות:

1) $a=-\frac{1}{2}$

2) $b=1\frac{4}{9}$

3) $\mathrm{A}\left(1\frac{1}{3},0\right)$