# סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

## פרק 18 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי

### תוכן העניינים


1. אינטגרלים מידיים ..... 1
2. אינטגרלים עם חילוק פולינומים ..... 4
3. אינטגרלים עם זיהוי מבנים ..... 6
4. אינטגרלים טריגונומטריים ..... 7
5. אינטגרלים מעריכיים ..... 11
6. אינטגרלים לוגריתמיים ..... 13
7. אינטגרלים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי ..... (ללא ספר)
8. מציאת פונקציה קדומה ..... 15
9. מציאת פונקציה קדומה כאשר נתונה נגזרת שנייה ..... 17
10. מציאת פונקציה קדומה עם פונקציות טריגוונמטריות ..... 18

# אינטגרלים מידיים:

## סיכום כללי:

- אינטגרציה של פונקציה פולינומית: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ , \ (n \neq -1)$ .
- הכפלה בקבוע $a$: $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c \ , \ (n \neq -1)$ .
- חיבור וחיסור איברים: $\int \left( f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ .
- אינטגרציה של ביטוי ליניארי בחזקה: $\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1) \cdot a} + c \ , \ (n \neq -1)$ .

## שאלות:

**1)** מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^3 dx$

ב. $\int 12x^5 dx$

ג. $\int x^4 dx$

ד. $\int 2x^3 dx$

ה. $\int \frac{2}{3} x^5 dx$

ו. $\int 7 dx$

ז. $\int \left( \frac{5}{6} x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} \right) dx$

ח. $\int \left( \frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b \right) dx$

**2)** מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^{-3} dx$

ב. $\int \frac{1}{x^3} dx$

ג. $\int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a} \right) dx$

ד. $\int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx$

**3)** מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^{\frac{1}{2}}dx$

ב. $\int \sqrt{x}dx$

ג. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

ד. $\int\left(\frac{4}{\sqrt{x}}+3\sqrt{x}\right)dx$

**4)** מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int(5x-1)^3\,dx$

ב. $\int 3(2-7x)^4\,dx$

ג. $\int \frac{18}{(6x+5)^2}dx$

ד. $\int \frac{1}{\sqrt{6x-3}}dx$

ה. $\int \sqrt{ax+b}dx$

**5)** מצא את האינטגרלים הבאים (שאלות מסכמות שונות):

א. $\int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$

ב. $\int\left(2x^2-x+1\right)dx$

ג. $\int\left(x^2+1\right)^2dx$

ד. $\int\left(x^2+1\right)(x+2)dx$

ה. $\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2}dx$

ו. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$

ז. $\int\left(x^2-2x+1\right)^{10}dx$

ח. $\int \frac{4}{(x-2)^5}dx$

ט. $\int \sqrt[3]{4x-10}\,dx$

י. $\int \frac{x}{(x-1)^4}dx$

יא. $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}dx$

יב. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}dx$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{x^4}{4}+c$ ב. $2x^6+c$ ג. $\frac{x^5}{5}+c$ ד. $\frac{x^4}{2}+c$ ה. $\frac{x^6}{9}+c$ ו. $7x+c$

ז. $\frac{x^5}{6}+4x^4-\frac{x^3}{6}+2x^2-\frac{1}{3}x+c$ ח. $\frac{x^4}{5}-\frac{ax^3}{3}-\frac{ax^2}{b}+bx+c$.

**2)** א. $-\frac{x^{-2}}{2}+c$ ב. $-\frac{1}{2x^2}+c$ ג. $-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{a}{2x^2}+\frac{x^2}{2a}+c$ ד. $2x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+c$.

**3)** א. $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$ ב. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$ ג. $2\sqrt{x}+c$ ד. $8\sqrt{x}+2\sqrt{x^3}+c$.

**4)** א. $\frac{(5x-1)^4}{20}+c$ ב. $-\frac{3(2-7x)^5}{35}+c$ ג. $-\frac{3}{6x+5}+c$

ד. $\frac{\sqrt{6x-3}}{3}+c$ ה. $\frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a}+c$.

**5)** א. $-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$ ב. $\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+c$ ג. $\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+c$

ד. $\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+c$ ה. $-\frac{1}{x}+2x+\frac{x^3}{3}+c$

ו. $\frac{x^{1.5}}{1.5}+\frac{x^{0.5}}{0.5}+c=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}+c$ ז. $\frac{(x-1)^{21}}{21}+c$

ח. $-\frac{1}{(x-2)^4}+c$ ט. $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4}+c$

י. $-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+c$ יא. $-\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$

יב. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x+c$.

# אינטגרלים עם חילוק פולינומים:

## סיכום כללי:

בחילוק פולינום $p(x)$ בפולינום $q(x)$ (נכתב: $\overline{p(x)|q(x)}$) יש לבצע 4 שלבים:

1) חילוק האיבר במעלה הגבוהה ביותר של $q(x)$ באיבר במעלה הגבוהה ביותר של $p(x)$.
2) רישום תוצאת החילוק בצד והכפלתה בכל הפולינום המחלק $q(x)$.
3) חיסור של תוצאת ההכפלה בפולינום המחולק $p(x)$.
4) חזרה לשלב הראשון כאשר מבצעים את חילוק האיבר במעלה הגבוהה ביותר של $q(x)$ בתוצאת החיסור.

התהליך מסתיים כאשר לא ניתן לחלק עוד.
במידה ותוצאת החיסור האחרונה מניבה ביטוי שמעלתו קטנה משל האיבר המחלק ב-$q(x)$ אז נתייחס לביטוי זה כאל שארית החלוקה.

## שאלות:

בצע את חילוק הפולינומים הבאים:

1) $\frac{x^2-5x-14}{x+2}$
2) $\frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}$
3) $\frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}$
4) $\frac{x^3-4x^2+9}{x-3}$
5) $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}$
6) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$
7) $\frac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10}$
8) $\frac{4x^2+x-1}{x-2}$
9) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\frac{x^2-5x-14}{x+2}dx$
ב. $\int\frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}dx$
ג. $\int\frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}dx$
ד. $\int\frac{x^3-4x^2+9}{x-3}dx$
ה. $\int\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}dx$
ו. $\int\frac{2x^5+x^4-4x^2+1}{2x+1}dx$

## תשובות סופיות:

1) $x-7$

2) $x^2+2x+5$

3) $x^3-2x^2+5x-1$

4) $x^2-x-3$

5) $x^2-4$

6) $x^2+1$

7) $4x^2+10x+1$

8) $4x+9+\frac{17}{x-2}$

9) א. $\frac{x^2}{2}-7x+c$

ב. $\frac{x^3}{3}+x^2+5x+c$

ג. $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x+c$

ד. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-3x+c$

ה. $\frac{x^3}{3}-4x+c$

ו. $\frac{x^5}{5}-x^2+x+c$.

# אינטגרלים עם זיהוי מבנים:

## סיכום כללי:

באינטגרציה של ביטוי מורכב נזהה האם המבנה תואם לזה המתקבל באחת מהגזירות של פונקציות מורכבות כדלהלן:

גזירה: $y=\frac{1}{u}\to y'=-\frac{u'}{u^2}$ אינטגרציה: $\int -\frac{u'}{u^2}dx=\frac{1}{u}+c$.

גזירה: $y=\frac{1}{\sqrt{u}}\to y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ אינטגרציה: $\int \frac{u'}{2\sqrt{u}}dx=\sqrt{u}+c$.

גזירה: $y=u^n\to y'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$ אינטגרציה: $\int\left(n\cdot u^{n-1}\cdot u'\right)dx=u^n+c$.

כאשר $u=u(x)$ היא פונקציה כלשהי של $x$.

## שאלות:

**1)** מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int -\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}dx$

ב. $\int \frac{x^2}{\left(x^3+6\right)^2}dx$

ג. $\int \frac{x-2}{\left(x^2-4x+1\right)^2}dx$

ד. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx$

ה. $\int \frac{6x-3}{\sqrt{x-x^2}}dx$

ו. $\int 8x\left(x^2+1\right)^3dx$

ז. $\int\left(2-x^2\right)\left(6x-x^3\right)^2dx$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{1}{x^2-1}+c$ ב. $-\frac{1}{3\left(x^3+6\right)}+c$ ג. $-\frac{1}{2\left(x^2-4x+1\right)}+c$

ד. $\sqrt{x^2+2}+c$ ה. $-6\sqrt{x-x^2}+c$ ו. $\left(x^2+1\right)^4+c$

ז. $\frac{\left(6x-x^3\right)^3}{9}+c$.

# אינטגרלים טריגונומטריים:

## סיכום כללי:

כללי האינטגרציה של פונקציות טריגונומטריות:

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

## שאלות:

**1)** חשב את האינטגרלים הבאים (שאלות יסודיות):

א. $\int \left( \sin x - 3\cos x + \frac{4}{\cos^2 x} + 5 \right) dx$

ב. $\int \left( \cos 3x - 2\sin 4x + \frac{4}{\cos^2 3x} \right) dx$

ג. $\int \left( \sin(\pi - x) + \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx$

ד. $\int \left( \sin 2x - 4\cos \frac{x}{3} \right) dx$

ה. $\int \frac{1}{\cos^2 4x} dx$

ו. $\int \frac{1}{\sin^2 10x} dx$

**2)** חשב את האינטגרלים הבאים (שימוש בזהויות):

א. $\int (2\sin x \cos x) dx$

ב. $\int (\sin 3x \cos 3x) dx$

ג. $\int (\sin^4 x - \cos^4 x) dx$

ד. $\int (\sin^2 x) dx$

**3)** חשב את האינטגרלים הבאים (שאלות מסכמות עם שימוש בזהויות):

א. $\int\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$

ב. $\int\left(\sin x+\cos x\right)^2 dx$

ג. $\int\tan^2 xdx$

ד. $\int\left(\sin x\cos x\cos\left(2x\right)\right)dx$

ה. $\int\frac{1}{\left(\sin x\cos x\right)^2}dx$

ו. $\int\cos^2 xdx$

ז. $\int\sin^2 4xdx$

ח. $\int\sin^4 4xdx$

ט. $\int\cos^4 x\,dx$

י. $\int\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}dx$

יא. $\int\sin^2 x\cos^4 xdx$

יב. $\int\frac{\sin 5x-\sin x}{\sin 4x-\sin 2x}dx$

יג. $\int\sin 7x\cos 5xdx$

יד. $\int\sin^3 4xdx$

טו. $\int\cos^3 xdx$

**4)** חשב את האינטגרלים הבאים (שאלות אתגר):

א. $\int\frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$

ב. $\int\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)dx$

ג. $\int\frac{1+\cos^3 x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$

**5)** חשב את האינטגרלים הבאים (זיהוי מבנים):

א. $\int\left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\right)dx$

ב. $\int\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$

ג. $\int\left(\cos x\sin^2 x\right)dx$

**6)** חשב את האינטגרלים הבאים (שאלות מסכמות בזיהוי מבנים):

א. $\int \cos\left(2x^2+1\right)\cdot 4x dx$

ב. $\int \cos\left(10x^4+1\right)\cdot x^3 dx$

ג. $\int \cos\left(\sin x\right)\cdot \cos x dx$

ד. $\int \sin\left(x^2+1\right)\cdot x dx$

ה. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

ו. $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$

ז. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x}} dx$

**7)** חשב את האינטגרלים הבאים (זיהוי מבנים עם פונקצית arctan):

א. $\int \frac{\arctan x}{x^2+1} dx$

ב. $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{x^2+1} dx$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $-\cos x-3\sin x+4\tan x+5x+c$ ב. $\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\cos 4x}{2}+\frac{4\tan 3x}{3}+c$

ג. $\cos(\pi-x)+\tan x+x+c$ ד. $-\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin\frac{x}{3}+c$

ה. $\frac{1}{4}\tan 4x+c$ ו. $-\frac{1}{10}\cot 10x+c$.

**2)** א. $-\frac{1}{2}\cos 2x+c$ ב. $-\frac{\cos 6x}{12}+c$ ג. $-\frac{\sin 2x}{2}+c$

ד. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+c$.

**3)** א. $\frac{1}{2}\sin 2x+c$ ב. $x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$ ג. $\tan x-x+c$

ד. $-\frac{1}{16}\cos 4x+c$ ה. $\tan x-\cot x+c$ ו. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$

ז. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}\sin 8x+c$ ח. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c$

ט. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$ י. $-\cot x-x+c$

יא. $\frac{1}{16}x+\frac{1}{64}\sin 2x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{192}\sin 6x+c$

יב. $2\sin x+c$ יג. $-\frac{1}{24}\cos 12x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

יד. $-\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 12x+c$ טו. $\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+c$.

**4)** א. $-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$ ב. $\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c$ ג. $3x+\frac{1}{2}\sin 2x-2\sin x+c$

**5)** א. $2\sqrt{\sin x}+c$ ב. $\frac{1}{\cos x}+c$ ג. $\frac{1}{3}\sin^3 x+c$

**6)** א. $\sin\left(2x^2+1\right)+c$ ב. $\frac{1}{40}\sin\left(10x^4+1\right)+c$

ג. $\sin(\sin x)+c$ ד. $-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right)+c$ ה. $-2\cos\sqrt{x}+c$

ו. $\frac{1}{2}\tan^2 x+c$ ז. $\sqrt{2\sin x}+c$.

**7)** א. $\frac{1}{2}\arctan^2 x+c$ ב. $\frac{2}{3}\sqrt{\arctan^3 x}+c$.

# אינטגרלים מעריכיים:

## סיכום כללי:

אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות:

- אינטגרלים יסודיים: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ ; $\int e^x dx = e^x + c$.
- אינטגרלים של פונקציות מורכבות: $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$ ; $\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$.

## שאלות:

**1)** חשב את האינטגרלים הבאים (שאלות יסודיות):

א. $\int \left(5e^x - e^{3x} + e^{-x} + 1\right) dx$

ב. $\int \left(3^x + 5^{2x}\right) dx$

ג. $\int \left(6\sqrt{e^{4x-1}}\right) dx$

ד. $\int \left(e^x + e^{-x}\right)^2 dx$

**2)** חשב את האינטגרלים הבאים (פישוט ע"י חילוק):

א. $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx$

ב. $\int \frac{3e^{3x} - 5e^{2x} + 4e^x - 2}{e^x - 1} dx$

**3)** חשב את האינטגרלים הבאים (שאלות יסודיות נוספות):

א. $\int \left(e^{4x} + e^{-x}\right) dx$

ב. $\int \left(e^{x+1}\right)^2 dx$

ג. $\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$

ד. $\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right) dx$

**4)** חשב את האינטגרלים הבאים (זיהוי מבנים):

א. $\int \left(\frac{e^x}{\sqrt{e^x + 3}}\right) dx$

ב. $\int \left(\frac{3 - e^x}{\left(e^x - 3x\right)^2}\right) dx$

ג. $\int \left(xe^{x^2}\right) dx$

ד. $\int e^{x^2} 2x dx$

ה. $\int e^{-2x^2} x dx$

ו. $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$

## תשובות סופיות:

1) א. $5e^x-\frac{e^{3x}}{3}-e^{-x}+x+c$ ב. $\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{5^{2x}}{2\ln 5}+c$

ג. $3e^{2x-\frac{1}{2}}+c$ ד. $\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+c$

2) א. $e^x+x+c$ ב. $\frac{3e^{2x}}{2}-2e^x+2x+c$

3) א. $\frac{1}{4}e^{4x}-e^{-x}+c$ ב. $\frac{1}{2}e^{2x+2}+c$

ג. $\frac{0.4^x}{\ln 0.4}+\frac{3.2^x}{\ln 3.2}+\frac{200^x}{\ln 200}+c$ ד. $8\sqrt{e^x}-\frac{3}{4}e^{\frac{-4x}{3}}+c$

4) א. $2\sqrt{e^x+3}+c$ ב. $\frac{1}{e^x-3x}+c$ ג. $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

ד. $e^{x^2}+c$ ה. $-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$ ו. $e^{\tan x}+c$.

# אינטגרלים לוגריתמיים:

## סיכום כללי:

אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות:

- אינטגרל יסודי: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$.
- אינטגרל של פונקציה מורכבת: $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$.

## שאלות:

**1)** חשב את האינטגרלים הבאים (שאלות יסודיות):

א. $\int\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x+1}-\frac{4}{3x-1}\right)dx$ ב. $\int\frac{x^2+3x-4}{x}dx$ ג. $\int\frac{x+3}{x^2-9}dx$

**2)** חשב את האינטגרלים הבאים (שאלות יסודיות נוספות):

א. $\int\frac{1}{4x}dx$ ב. $\int\frac{1+x+x^2}{x}dx$ ג. $\int\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

ד. $\int\frac{1}{4x-1}dx$ ה. $\int\frac{x+3}{x+2}dx$ ו. $\int\frac{4x+1}{x+2}dx$

**3)** חשב את האינטגרלים הבאים (חילוק פולינומים):

א. $\int\frac{x^2+3x+5}{x+1}dx$ ב. $\int\frac{x^3-x^2+5x-6}{x-2}dx$ ג. $\int\frac{x^4+3}{x+1}dx$

**4)** חשב את האינטגרלים הבאים (זיהוי מבנים):

ד. $\int\frac{2x}{x^2-3}dx$ ה. $\int\frac{x-1}{x^2-2x}dx$ ו. $\int\frac{e^x}{e^x+5}dx$

ז. $\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$ ח. $\int\frac{\cos x}{\sin x}dx$

**5)** חשב את האינטגרלים הבאים (זיהוי מבנים נוספים):

א. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ ב. $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$ ג. $\int \tan x dx$

ד. $\int \cot x dx$ ה. $\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1}dx$ ו. $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $3\ln|x|+2\ln|x+1|-\frac{4\ln|3x-1|}{3}+c$ ב. $\frac{x^2}{2}+3x-4\ln|x|+c$ ג. $\ln|x-3|+c$

**2)** א. $\frac{\ln|x|}{4}+c$ ב. $\ln|x|+x+\frac{x^2}{2}+c$

ג. $x+2\ln|x|-\frac{1}{x}+c$ ד. $\frac{\ln|4x-1|}{4}+c$

ה. $x+\ln|x+2|+c$ ו. $4x-7\ln|x+2|+c$

**3)** א. $\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x+1|+c$ ב. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+7x+8\ln|x-2|+c$

ג. $\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+4\ln|x+1|+c$

**4)** א. $\ln|x^2-3|+c$ ב. $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x|+c$ ג. $\ln|e^x+5|+c$

ד. $\ln|e^x+e^{-x}|+c$ ה. $\ln|\sin x|+c$

**5)** א. $\ln|x^2+1|+c$ ב. $\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+c$

ג. $-\ln|\cos x|+c$ ד. $\ln|\sin x|+c$

ה. $e^2\ln|e^x+1|+c$ ו. $\ln|\ln x|+c$.

# מציאת פונקציה קדומה:

## שאלות:

**1)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=3x^2-7$.
מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2,-1)$.

**2)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2x-6$.
ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
מצא את הפונקציה.

**3)** הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=x^2-8x+2$. נתון: $f(-2)=1$.
א. מצא את $f(x)$.
ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$.

**4)** נתונה הנגזרת של פונקציה $f(x)$: $f'(x)=9x^2-4$.
ערך הפונקציה בנקודה $x=1$ הוא 3.
א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=1$.
ב. מצא את $f(x)$.
ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

**5)** הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=2x-3$.
לפונקציה משיק ששיפועו הוא 3-.
א. מצא את שיעור ה-$x$ של נקודת ההשקה.
ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 7.

**6)** הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-6x-5$.
המשיק לפונקציה בנקודה A יוצר זווית של $45^\circ$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-$x$.
א. מצא את שיעור ה-$x$ של הנקודה A.
ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 6-.
ג. מצא את משוואת המשיק.

**7)** הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=3x-4$.
הישר $y=2x+5$ משיק לגרף הפונקציה. מצא את $f(x)$.

## תשובות סופיות:

**1)** $f(x)=x^3-7x+5$.

**2)** $f(x)=x^2-6x+14$.

**3)** א. $f(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2+2x+23\frac{2}{3}$ ב. $y=-5x+27$.

**4)** א. $y=5x-2$ ב. $f(x)=3x^3-4x+4$ ג. $(0,-2)$ , $(0.4,0)$.

**5)** א. $x=0$ ב. $f(x)=x^2-3x+7$.

**6)** א. $x=-1$ ב. $f(x)=-3x^2-5x-8$ ג. $y=x-5$.

**7)** $f(x)=\frac{3x^2}{2}-4x+11$.

# מציאת פונקציה קדומה כאשר נתונה נגזרת שנייה:

## שאלות:

**1)** נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=6x+6$. שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא 12- וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1. מצא את הפונקציה.

**2)** נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$ : $f''(x)=8x-6$.

א. מצא את $f'(x)$ אם ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון ב- $x=2$.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה בנקודת הקיצון הוא $\frac{2}{3}$.

**3)** נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$ : $f''(x)=2x-3$.

א. שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 4. מצא את $f'(x)$.

ב. ערך הפונקציה בנקודת ההשקה הוא 5. מצא את $f(x)$.

**4)** נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=1+\frac{8}{x^3}$.

המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y=-4$. מצא את הפונקציה.

## תשובות סופיות:

**1)** $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$.

**2)** א. $f'(x)=4x^2-6x-4$ ב. $f(x)=\frac{4x^3}{3}-3x^2-4x+10$.

**3)** א. $f'(x)=x^2-3x+6$ ב. $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+6x+\frac{1}{6}$.

**4)** $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{4}{x}+3x+2$.

# מציאת פונקציה קדומה עם פונקציות טריגונומטריות:

## שאלות:

**1)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=\cos x+4\sin 2x$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(\frac{\pi}{6},1\frac{1}{2}\right)$.

**2)** נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=-\cos x-4\sin 2x$.

שיפוע הפונקציה בנקודה $(\pi,\pi)$ הוא 3. מצא את הפונקציה.

**3)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=\sin x+\cos x$.

א. ידוע כי הפונקציה המקורית עוברת בראשית הצירים.

הוכח כי הנגזרת $f'(x)$ והפונקציה המקורית $f(x)$ מקיימות

את המשוואה: $f(x)+f'(x)=2\sin x+1$.

ב. מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$ באופן הבא: $g(x)=f(x)+f'(x)$.

i. מצא את נקודת המקסימום הנמצאת ברביע הראשון והקרובה ביותר לציר ה- $y$ של הפונקציה $g(x)$.

ii. מצא את נקודת המקסימום הנמצאת ברביע הראשון והקרובה ביותר לציר ה- $y$ של הפונקציה $f(x)$.

iii. כתוב את משוואת הישר העובר דרך שתי הנקודות שמצאת.

## תשובות סופיות:

**1)** $f(x)=\sin x-2\cos 2x+2$.

**2)** $f(x)=\sin 2x+\cos x+x+1$.

**3)** ב. i. $(0.5\pi,3)$ ii. $\left(0.75\pi,\sqrt{2}+1\right)$ iii. $y=-0.746x+4.172$.