

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 8 - חקירת פונקציה

תוכן העניינים

1. חקירת פונקציה – שאלות כלליות.....1
2. הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה.....6

חקירת פונקציה – שאלות כלליות

שאלות

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$, וידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת קיצון. מצאו את הקבוע a .

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$, וידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת קיצון. מצאו את הקבועים a, b .

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$, וידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת פיתול. מצאו את הקבוע a .

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$, וידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת פיתול. מצאו את הקבועים a, b .

(5) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 3$ הוא 33. מצאו את a .

(6) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3, 9)$ הוא 12. מצאו את a, b .

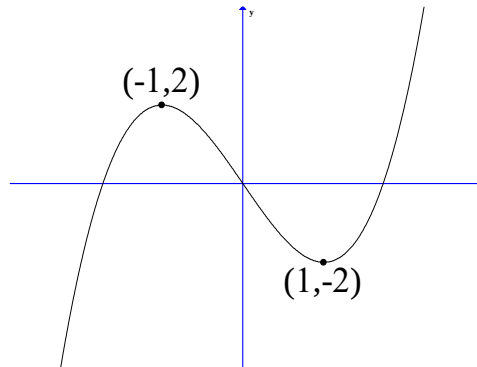
(7) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$. ידוע שהישר $y = 4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את a .

(8) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$. ידוע שהישר $y = 0.5x + 1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את a ואת b .

(9) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$.

ידוע שהישר $x=1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את a .

שאלות 10-17 מתייחסות לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$:



(10) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$?

(11) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$?

(12) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$?

(13) עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד?

(14) עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות?

(15) עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

(16) האם קיים ערך של k , עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון?

(17) מצאו את התחומים בהם הפונקציה חח"ע.

(18) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f'(2) = 4$.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

א. חשבו $z'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי f עולה. הוכיחו כי z יורדת.

(19) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1) = 2$, $f'(1) = e$.

$$z(x) = f^2(\ln x) + \frac{1}{x}$$

- א. האם z עולה או יורדת בנקודה $x = e$?
 ב. נתון בנוסף כי f שלילית ועולה.
 מה ניתן לומר על תחומי העלייה והירידה של z ?

(20) נתונה פונקציה $f(x)$ חיובית ויורדת.

$$z(x) = \sqrt{f(x^2) + 4}$$

מי מהבאים בהכרח נכון?

- א. z עולה לכל x .
 ב. z יורדת לכל x .
 ג. z עולה לכל $x > 0$.
 ד. z יורדת לכל $x > 0$.

(21) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1) = e$.

$$g(x) = x^2 + f(\ln x)$$

- א. חשבו את $g'(e)$.
 ב. הוכיחו שהפונקציה g עולה בנקודה $x = e$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$$

(22) הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

- ידוע שנקודת החיתוך היחידה של $f(x)$ עם ציר ה- x היא ב- $x = 0$.
 נגדיר $g(x) = (f(x))^2$. איזו מבין הטענות הבאות **בהכרח לא נכונה**:
 א. אם f עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- g יש נקודת מינימום.
 ב. אם f יורדת בכל תחום הגדרתה אז ל- g יש נקודת מינימום.
 ג. אם f עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- g אין נקודת קיצון.

(23) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה פעמיים לכל x ומקיימת $f''(x) = a \cdot f(x)$, כאשר $a < 0$.

איזו מבין הטענות הבאות בהכרח לא נכונה:

- א. בתחום בו $f(x)$ שלילית, $f(x)$ קמורה (קעורה כלפי מעלה).
- ב. אם $f(x)$ חיובית בתחום מסוים אז $f'(x)$ יורדת באותו התחום.
- ג. אם בתחום מסוים $f(x)$ עולה וחותכת את ציר x בנקודה $(n, 0)$, אז שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = n$ הוא המקסימלי באותו התחום.
- ד. אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אז $f(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה.

תשובות סופיות

$$a = -\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$a = -4, b = 6 \quad (2)$$

$$a = -\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$a = -1, b = 3 \quad (4)$$

$$a = 1 \quad (5)$$

$$a = \frac{2}{3}, b = -1 \quad (6)$$

$$a = 8 \quad (7)$$

$$a = \frac{1}{2}, b = 1 \quad (8)$$

$$a = -7 \quad (9)$$

$$1 \quad (10)$$

$$2 \quad (11)$$

$$3 \quad (12)$$

$$k < -2, k > 2 \quad (13)$$

$$k = \pm 2 \quad (14)$$

$$-2 < k < 2 \quad (15)$$

$$\text{לא} \quad (16)$$

$$x < -1, -1 < x < 1, x > 1 \quad (17)$$

$$z'(0.5) = -16 \quad \text{א.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad (18)$$

$$\text{א. עולה.} \quad \text{ב. יורדת.} \quad (19)$$

$$\text{ד} \quad (20)$$

$$2e+1 \quad \text{א.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad \text{ג.} \quad 2e+1 \quad (21)$$

$$\text{ג} \quad (22)$$

$$\text{ד} \quad (23)$$

הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם:

$$(1) \quad (-\infty < x < \infty), \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2$$

$$(2) \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right), \quad x < 2 \sin x$$

$$(3) \quad (x > 0), \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2}$$

$$(4) \quad (x \geq 0), \quad \ln(x+1) \leq x$$

$$(5) \quad \text{נתון כי } f \text{ רציפה לכל } x \geq 0, \quad f'(x) > 0 \text{ לכל } x > 0, \text{ וכן } f(0) = 0.$$

$$\text{הוכיחו כי לכל } x > 0 \text{ מתקיים } f(x) - \frac{1}{2}(f(x))^2 < \ln(1 + f(x)).$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il