

מתמטיקה להנדסאי בניין

פרק 4 - חקירת משוואה ממעלה ראשונה

תוכן העניינים

1. פתרון משוואות ממעלה ראשונה עם פרמטר..... 1
2. חקירת משוואות ממעלה ראשונה..... 2
3. חקירה של מערכת שתי משוואות ממעלה ראשונה..... 5
4. חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם שורשים..... 10
5. חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם ערך מוחלט..... 11

פתרון משוואות ממעלה ראשונה עם פרמטר:

סיכום כללי:

שלבי עבודה:

- נפתור את המשוואה.
- נאתר את ערכי הפרמטר המאפשרים את המכנה בכל שלבי הפתרון.
- נבדוק לכל ערך כזה בנפרד כמה פתרונות יש למשוואה על ידי הצבתו במשוואה המקורית.

שאלות:

(1) פתרו את המשוואה: $kx + 6k = 2x + 3k^2$.

(2) פתרו את המשוואה: $a^2(x-1) = 3ax + 4(x-a)$.

(3) פתרו את מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} 2kx + 5y = 2k^2 \\ 2x - y = -10 \end{cases}$$

(4) פתרו את מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases} bx - (1-2b)y = 1 \\ (2b+1)x + 3(by-1) = 0 \end{cases}$$

תשובות סופיות:

(1) $x = 3k \quad (k \neq 2)$

(2) $x = \frac{a}{a+1}$

(3) $(k-5, 2k)$

(4) $\left(\frac{2-b}{b(b+1)}, \frac{1}{b+1} \right), \quad b \neq 0, \pm 1$

חקירה של משוואה ממעלה ראשונה:

שאלות:

(1) נתונה המשוואה הבאה: $m^2(2x-1) = 9(x-1) - x(6+5m)$.

מצאו לאילו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ומצאו אותו).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

(2) נתונה המשוואה: $k^2(5-2x) = 3(15-2kx)$.

א. מצאו לאילו ערכי k למשוואה:

i. פתרון יחיד.

ii. אף פתרון.

iii. אינסוף פתרונות.

ב. מצאו לאילו ערכי k פתרון המשוואה:

i. חיובי.

ii. מקיים את אי-השוויון: $2x-3 > x$.

(3) נתונה המשוואה: $\frac{mx}{m-2} = \frac{2m}{m-5} - \frac{6x}{m^2-7m+10}$.

מצאו לאילו ערכי m למשוואה:

א. פתרון יחיד.

ב. אף פתרון.

ג. אינסוף פתרונות.

(4) לפניכם המשוואה: $m \cdot \frac{x-1}{x} - \frac{m+6}{m} = \frac{-3}{x}$.

א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ג. האם עבור ערכי ה- m הנותנים אינסוף פתרונות, כל x יהיה פתרון של המשוואה?

ד. עבור אלו ערכי m יהיה פתרון המשוואה גדול מ-2?

$$(5) \quad \text{נתונה המשוואה: } x(m^2 - 9) = 2(m(3x+1) + 1 - x)$$

- א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.
 ב. חקרו את המשוואה ומצא עבור אלו ערכי m יש למשוואה:
 i. פתרון יחיד.
 ii. אינסוף פתרונות.
 iii. אף פתרון.
 ג. עבור איזה ערך של m פתרון המשוואה יהיה: $x = 2$?

$$(6) \quad \text{נתונה המשוואה: } \frac{5}{k-4} - \frac{kx}{3k+15} = \frac{k^2+29}{k^2+k-20}$$

- א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.
 ב. האם קיים ערך של k עבורו יש למשוואה אינסוף פתרונות?
 ג. עבור איזה ערך של k פתרון המשוואה הוא: -4 ?

$$(7) \quad \text{לפניכם המשוואה הבאה: } \frac{m^2x}{m-5} + \frac{2mx-m^2+1}{m-5} = 1$$

- מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:
 א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).
 ב. אינסוף פתרונות.
 ג. אף פתרון.

$$(8) \quad \text{לפניכם המשוואה הבאה: } \frac{(m^2+1)x-4}{x-2} = m+1$$

- מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:
 א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).
 ב. אינסוף פתרונות.
 ג. אף פתרון.

$$(9) \quad \text{לפניכם המשוואה הבאה: } \frac{5m-2}{mx-1} = -3$$

- מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:
 א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).
 ב. אינסוף פתרונות.
 ג. אף פתרון.

$$(10) \text{ לפניכם המשוואה הבאה: } \frac{x+1}{x-m+1} = \frac{x}{x+m+2}$$

מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

תשובות סופיות:

$$(1) \text{ א. } \frac{1}{2}, m \neq -3, \frac{m-3}{2m-1} \quad \text{ב. } m = -3 \quad \text{ג. } m = \frac{1}{2}$$

$$(2) \text{ א. } 1, 3, k \neq 0 \quad \text{ב. } k = 0 \quad \text{ג. } k = 3$$

$$\text{ב. } k > 0 \text{ או } k < -3 \text{ וגם } k \neq 3 \quad \text{ג. } 0 < k < 15 \text{ וגם } k \neq 3$$

$$(3) \text{ א. } 2, 3, 5, m \neq 2 \quad \text{ב. } m = 2, 3, 5 \quad \text{ג. } m \text{ אף } m$$

$$(4) \text{ א. } m \neq 3, x = \frac{1}{m+2} \quad \text{ב. פתרון יחיד: } m \neq 0, -2, 3, \text{ אף פתרון:}$$

$$\text{ג. לא, רק: } x \neq 0 \quad \text{ד. } -2 < m < -1.5$$

$$(5) \text{ א. } m \neq 7, -1, x = \frac{1}{m-7} \quad \text{ב. פתרון יחיד: } m \neq 7, -1, \text{ אף פתרון: } m = 7,$$

$$\text{אינסוף פתרונות: } m = -1$$

$$(6) \text{ א. } k \neq 0, 4, -5, x = \frac{3}{k} - 3 \quad \text{ב. אף } k \quad \text{ג. } k = -3$$

$$(7) \text{ א. } m \neq 0, -2, 5 \quad \text{ב. אף } m \quad \text{ג. } m = 0, -2, 5$$

$$(8) \text{ א. } m \neq 0, \pm 1 \quad \text{ב. } m = 1 \quad \text{ג. } m = 0, -1$$

$$(9) \text{ א. } m \neq 0, \frac{2}{5} \quad \text{ב. אף } m \quad \text{ג. } m = \frac{2}{5}, 0$$

$$(10) \text{ א. } m \neq 0, -1, -2, -\frac{1}{2} \quad \text{ב. אף } m \quad \text{ג. } m = 0, -1, -2, -\frac{1}{2}$$

חקירה של מערכת שתי משוואות ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

שלבי עבודה:

- נפתור את מערכת המשוואות.
- נאתר את ערכי הפרמטר המאפסים את המכנה בכל שלבי הפתרון.
- נבדוק לכל ערך כזה בנפרד כמה פתרונות יש למערכת על ידי הצבתו.

המשמעות הגרפית של חקירת מערכת משוואות ממעלה ראשונה:

בהינתן מערכת שתי משוואות מהצורה: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ נאמר כי:

אם: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ אז הישרים נחתכים (כלומר למערכת פתרון יחיד).

אם: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ אז הישרים מקבילים (כלומר למערכת אף פתרון).

אם: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ אז הישרים מתלכדים (כלומר למערכת אינסוף פתרונות).

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} x + 3ay = a \\ ax + 3y = 4a - 3 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת המשוואות:}$$

א. מצאו לאלו ערכי a למערכת המשוואות:

- פתרון יחיד.
- אף פתרון.
- אינסוף פתרונות.

ב. מצאו לאלו ערכי a נקודת החיתוך בין הישרים (המיוצגים על ידי המשוואות) נמצאת ברביע השלישי.

$$(2) \quad \begin{cases} (m+4)x + 5y = m+8 \\ x + my = m+2 \end{cases} \quad \text{נתונות מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. מצאו עבור אלו ערכי m יש למערכת:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ג. פתרון המערכת מייצג נקודה במערכת צירים.

הוכיחו כי נקודה זו נמצאת על הישר: $y(m-1) = 2(m-1)x + 4 - m$.

ד. עבור אלו ערכי m פתרון המערכת:

i. יהיה ברביע השני.

ii. יהיה מתחת לציר ה- x .

iii. יהיה מימין לציר ה- y .

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{4} - 2x + 3y = \left(k - \frac{x}{2}\right)^2 + 4 \\ x - 10 = k(1 - y) \end{cases} \quad \text{לפניכם מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. מצאו לאלו ערכי k יש למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

$$(4) \quad \begin{cases} k(x-1) = 1 - 2y \\ \frac{2x+3}{k} = 3 - y \end{cases} \quad \text{לפניכם מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. מצאו לאלו ערכי k יש למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

$$(5) \quad \begin{cases} k^2(1-x) = k+9x+12y \\ x = 1 - \frac{2(y+1)}{k} \end{cases} \quad \text{לפניכם מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. מצאו לאלו ערכי k יש למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

$$(6) \quad \begin{cases} (2-k)x - y = k \\ 3x + ky = -1 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. מצאו את הערך של k עבורו $(2, 7)$ הוא פתרון של מערכת המשוואות.

ב. האם יש למשוואה פתרונות נוספים עבור הערך של k שמצאת בסעיף הקודם?

ג. האם קיים ערך של k עבורו למערכת המשוואות לא יהיו פתרונות כלל? אם כן מצאו אותו.

$$(7) \quad \begin{cases} ax + b^2y = a^2 \\ 3x + by = 9b \end{cases} \quad \text{לפניכם מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. הראו שכאשר $a = 3b$ יש למערכת אינסוף פתרונות.

ג. עבור אלו ערכי a ו- b הפתרון היחיד של המערכת יהיה $(4, 3)$?

$$(8) \quad \begin{cases} amx + y = m^2 \\ bx + my = -9m \end{cases} \quad \text{לפניך מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. מצאו ערכי הפרמטרים a ו- b אם ידוע כי כאשר $m = 4$ פתרון המשוואה הוא $(4, 0)$.

ב. הוכיחו את הטענות הבאות:

i. לכל ערך של m יש למערכת פתרון ממשי.

ii. פתרון המערכת תמיד יהיה $(m, 0)$.

ג. העזרו בסעיף הקודם וקבע איזו משוואה מבין שלושת המשוואות הבאות לא תכיל את הפתרון היחיד הנ"ל:

$$i. \quad 7y + 2m = 2x$$

$$ii. \quad my = 2x - m$$

$$iii. \quad m(y - mx) = 2x - m(m^2 + 2)$$

$$(9) \quad \begin{cases} x + (k-9)y = 8 \\ x - \frac{14y}{k} = 1 \end{cases} \quad \text{לפניך הישרים הבאים:}$$

- א. עבור אלו ערכי k הישרים הללו מקבילים?
 ב. הביעו באמצעות k את נקודת החיתוך של הישרים.
 ג. עבור איזה ערך של k נקודת החיתוך של הישרים תהיה על הישר: $y = x - 8$?

$$(10) \quad \begin{cases} (k^2 + 6)x + ay = 15 \\ kx + ay = 3 \end{cases} \quad \text{לפניכם שני הישרים: } a, k, \text{ פרמטרים, } a \neq 0.$$

- א. הוכיחו כי לכל ערך של k הישרים הללו נחתכים.
 ב. מצאו את a אם ידוע כי כאשר $k = 6$ נקודת החיתוך היא $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.
 ג. עבור איזה ערך של k נקודת החיתוך תהיה $(2, 1)$?
 ד. הראו כי נקודת החיתוך של הישרים נמצאת על גרף הפונקציה: $\frac{4y}{x} = k^2 - 5k + 6$.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } a \neq \pm 1 \quad \text{ii. } a = -1 \quad \text{iii. } a = 1 \quad \text{ב. } -1 < a < 0$$

$$(2) \quad \text{א. } m \neq 1, -5, \left(\frac{m-2}{m-1}, \frac{m}{m-1} \right)$$

ב. פתרון יחיד: $m \neq 1, -5$, אינסוף פתרונות: $m = -5$, אף פתרון: $m = 1$.
ג. הוכחה.

$$\text{ד. } 1 < m < 2 \quad \text{ii. } 0 < m < 1 \quad \text{iii. } m \neq -5, m < 1, m > 2$$

$$(3) \quad \text{א. } k \neq 3, -1 \quad \text{ii. } k = 3 \quad \text{iii. } k = -1 \quad \text{ב. } \left(\frac{k^2 + 3k + 10}{k+1}, \frac{8}{k+1} \right)$$

$$(4) \quad \text{א. } k \neq 0, \pm 2 \quad \text{ii. } k = 2 \quad \text{iii. } k = 0, -2 \quad \text{ב. } \left(\frac{k-3}{k+2}, \frac{3k+1}{k+2} \right)$$

$$(5) \quad \text{א. } k \neq 0, 3 \quad \text{ii. } k = 3 \quad \text{iii. } k = 0 \quad \text{ב. } \left(\frac{k-4}{k-3}, \frac{6-k}{2k-6} \right)$$

$$(6) \quad \text{א. } k = -1 \quad \text{ב. כן. } \quad \text{ג. } k = 3$$

$$(7) \quad \text{א. } \left(a + 3b, -\frac{3a}{b} \right) \quad \text{ג. } a = -2, b = 2$$

$$(8) \quad \text{א. } a = 1, b = -9 \quad \text{ג. ii.}$$

$$(9) \quad \text{א. } k = 2, 7 \quad \text{ב. } \left(\frac{k^2 - 9k + 112}{k^2 - 9k + 14}, \frac{7k}{k^2 - 9k + 14} \right) \quad \text{ג. } k = 8$$

$$(10) \quad \text{א. הוכחה. } \quad \text{ב. } a = 1 \quad \text{ג. } k = 1$$

חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם שורשים:

שאלות:

(1) לפניכם המשוואה: $(m-1)x = \sqrt{m-1}$.

מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

(2) לפניכם המשוואה: $\frac{x-m}{\sqrt{3x-2}} + \sqrt{3x-2} = \frac{mx}{\sqrt{3x-2}}$.

מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

תשובות סופיות:

(1) א. פתרון יחיד: $m > 1$ והוא: $x = \frac{1}{\sqrt{m-1}}$ ב. $m = 1$ ג. $m < 1$.

(2) א. פתרון יחיד: $\frac{6}{5} < m < 4$ והוא: $x = \frac{m+2}{4-m}$ ב. אינסוף: $\emptyset$ ג. אף פתרון: $m \geq 4$, $m \leq \frac{6}{5}$.

חקירה של משוואות ממעלה ראשונה עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \text{ : הגדרת ערך מוחלט}$$

- משוואה מהצורה $|A| = |B|$ תפוצל לשתי משוואות: $A = B$ או $A = -B$. יש לחקור כל מקרה בנפרד ולאחד פתרונות.
- עבור משוואות המכילות ביטויים עם ערכים מוחלטים יש להפריד עבור כל מקרה לפי הגדרת הערך המוחלט. לבסוף יש לאחד פתרונות.
- למשוואה מהצורה $|x| = k$ (כאשר x הוא המשתנה ו- k הוא פרמטר) יתכנו:
 - שני פתרונות אם $k > 0$.
 - פתרון אחד (והוא $x = 0$) אם $k = 0$.
 - אף פתרון אם $k < 0$.

שאלות:

$$(1) \text{ חקור את המשוואה הבאה: } |x-2m| = |x+1|$$

$$(2) \text{ חקור את המשוואה הבאה: } |mx-3x| = |x-m|$$

$$(3) \text{ חקור את המשוואה הבאה: } \frac{mx^2}{|x|-1} - m|x| = 2m+1$$

$$(4) \text{ נתונה מערכת המשוואות הבאה: } \begin{cases} y + |x-2| = 3 \\ |x+y| = m \end{cases}$$

מצא עבור אלו ערכי m יש למערכת:

- פתרון אחד בלבד.
- שני פתרונות שונים.
- אינסוף פתרונות.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{פתרון יחיד: } m \neq -\frac{1}{2}. \quad \text{אף פתרון: } \emptyset. \quad \text{אינסוף: } m = -\frac{1}{2}.$$

$$(2) \quad \text{פתרון יחיד: } m = 0 \text{ והוא } x = 0. \quad \text{אף פתרון: } \emptyset.$$

$$\text{שני פתרונות: } m \neq 0 \text{ והם: } x_{1,2} = -\frac{2m}{3}, \frac{12m}{5}.$$

$$(3) \quad \text{עבור: } m = -\frac{1}{2} \text{ יש פתרון יחיד: } x = 0.$$

$$\text{עבור: } m > 0, -\frac{1}{2} < m < 0, m < -1 \text{ יש שני פתרונות.}$$

$$\text{עבור: } m = 0, -1 < m < -0.5 \text{ אין פתרון כלל.}$$

$$(4) \quad \text{א. } m = 0, m > 5 \quad \text{ב. } 0 < m < 5 \quad \text{ג. } m = 5.$$