# מכינת רענון והשלמה במתמטיקה

## פרק 4 - חקירת משוואה ממעלה ראשונה

### תוכן העניינים

1. פתרון משוואות ממעלה ראשונה עם פרמטר ........ 1
2. חקירת משוואות ממעלה ראשונה ........ 2
3. חקירה של מערכת שתי משוואות ממעלה ראשונה ........ 5
4. חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם שורשים ........ 10
5. חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם ערך מוחלט ........ 11

# פתרון משוואות ממעלה ראשונה עם פרמטר:

## סיכום כללי:

### שלבי עבודה:

- נפתור את המשוואה.
- נאתר את ערכי הפרמטר המאפסים את המכנה בכל שלבי הפתרון.
- נבדוק לכל ערך כזה בנפרד כמה פתרונות יש למשוואה על ידי הצבתו במשוואה המקורית.

## שאלות:

1) פתרו את המשוואה: $kx+6k=2x+3k^2$.

2) פתרו את המשוואה: $a^2(x-1)=3ax+4(x-a)$.

3) פתרו את מערכת המשוואות: $\begin{cases} 2kx+5y=2k^2 \\ 2x-y=-10 \end{cases}$.

4) פתרו את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} bx-(1-2b)y=1 \\ (2b+1)x+3(by-1)=0 \end{cases}$

## תשובות סופיות:

1) $(k\neq 2)\quad x=3k$.

2) $x=\dfrac{a}{a+1}$.

3) $(k-5,2k)$.

4) $b\neq 0\,,\ \pm 1\quad ,\quad \left(\dfrac{2-b}{b(b+1)},\dfrac{1}{b+1}\right)$

# חקירה של משוואה ממעלה ראשונה:

## שאלות:

**1)** נתונה המשוואה הבאה: $m^2(2x-1)=9(x-1)-x(6+5m)$.

מצאו לאילו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ומצאו אותו).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

**2)** נתונה המשוואה: $k^2(5-2x)=3(15-2kx)$.

א. מצאו לאלו ערכי $k$ למשוואה:

i. פתרון יחיד.

ii. אף פתרון.

iii. אינסוף פתרונות.

ב. מצאו לאלו ערכי $k$ פתרון המשוואה:

i. חיובי.

ii. מקיים את אי-השוויון: $2x-3>x$.

**3)** נתונה המשוואה: $\frac{mx}{m-2}=\frac{2m}{m-5}-\frac{6x}{m^2-7m+10}$.

מצאו לאלו ערכי $m$ למשוואה:

א. פתרון יחיד.

ב. אף פתרון.

ג. אינסוף פתרונות.

**4)** לפניכם המשוואה: $m\cdot\frac{x-1}{x}-\frac{m+6}{m}=\frac{-3}{x}$.

א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ג. האם עבור ערכי ה- $m$ הנותנים אינסוף פתרונות, כל $x$ יהיה פתרון של המשוואה?

ד. עבור אלו ערכי $m$ יהיה פתרון המשוואה גדול מ-2?

**5)** נתונה המשוואה: $x\left(m^2-9\right)=2\left(m\left(3x+1\right)+1-x\right)$.

א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. חקרו את המשוואה ומצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ג. עבור איזה ערך של $m$ פתרון המשוואה יהיה: $x=2$ ?

**6)** נתונה המשוואה: $\frac{k^2+29}{k^2+k-20}=\frac{kx}{3k+15}-\frac{5}{k-4}$.

א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. האם קיים ערך של $k$ עבורו יש למשוואה אינסוף פתרונות?

ג. עבור איזה ערך של $k$ פתרון המשוואה הוא: 4-?

**7)** לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{m^2x}{m-5}+\frac{2mx-m^2+1}{m-5}=1$.

מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות $m$).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

**8)** לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{\left(m^2+1\right)x-4}{x-2}=m+1$.

מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות $m$).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

**9)** לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{5m-2}{mx-1}=-3$.

מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות $m$).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

**10)** לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{x+1}{x-m+1}=\frac{x}{x+m+2}$.

מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות $m$).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $m\neq -3 , \frac{1}{2}$ , $\frac{m-3}{2m-1}$ ב. $m=-3$ ג. $m=\frac{1}{2}$

**2)** א. 1. $k\neq 0,3$ 2. $k=0$ 3. $k=3$.

ב. 1. $k>0$ או $k<-3$ וגם $k\neq 3$ 2. $0<k<15$ וגם $k\neq 3$.

**3)** א. $m\neq 2,3,5$ ב. $m=2,3,5$ ג. אף $m$.

**4)** א. $m\neq 3$ , $x=\frac{1}{m+2}$ ב. פתרון יחיד: $m\neq 0,-2,3$ , אף פתרון: $m=0,-2$ , אינסוף פתרונות: $m=3$. ג. לא, רק: $x\neq 0$.

ד. $-2<m<-1.5$.

**5)** א. $m\neq 7,-1$ , $x=\frac{1}{m-7}$ ב. פתרון יחיד: $m\neq 7,-1$ , אף פתרון: $m=7$ ,
אינסוף פתרונות: $m=-1$.

**6)** א. $k\neq 0,4,-5$ , $x=\frac{3}{k}-3$ ב. אף $k$ ג. $k=-3$.

**7)** א. $m\neq 0 , -2 , 5$ ב. אף $m$ ג. $m=0 , -2 , 5$

**8)** א. $m\neq 0 , \pm 1$ ב. $m=1$ ג. $m=0 , -1$

**9)** א. $m\neq 0 , \frac{2}{5}$ ב. אף $m$ ג. $m=\frac{2}{5} , 0$

**10)** א. $m\neq 0 , -1 , -2 , -\frac{1}{2}$ ב. אף $m$ ג. $m=0 , -1 , -2 , -\frac{1}{2}$

# חקירה של מערכת שתי משוואות ממעלה ראשונה:

## סיכום כללי:

### שלבי עבודה:

- נפתור את מערכת המשוואות.
- נאתר את ערכי הפרמטר המאפסים את המכנה בכל שלבי הפתרון.
- נבדוק לכל ערך כזה בנפרד כמה פתרונות יש למערכת על ידי הצבתו.

### המשמעות הגרפית של חקירת מערכת משוואות ממעלה ראשונה:

בהינתן מערכת שתי משוואות מהצורה: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ נאמר כי:

אם: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ אז הישרים נחתכים (כלומר למערכת פתרון יחיד).

אם: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ אז הישרים מקבילים (כלומר למערכת אף פתרון).

אם: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ אז הישרים מתלכדים (כלומר למערכת אינסוף פתרונות).

## שאלות:

1) נתונה מערכת המשוואות: $\begin{cases} x+3ay=a \\ ax+3y=4a-3 \end{cases}$.

א. מצאו לאלו ערכי $a$ למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אף פתרון.

iii. אינסוף פתרונות.

ב. מצאו לאלו ערכי $a$ נקודת החיתוך בין הישרים (המיוצגים על ידי המשוואות) נמצאת ברביע השלישי.

**2)** נתונות מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}(m+4)x+5y=m+8\\ x+my=m+2\end{cases}$.

א. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למערכת:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ג. פתרון המערכת מייצג נקודה במערכת צירים.
הוכיחו כי נקודה זו נמצאת על הישר: $y(m-1)=2(m-1)x+4-m$.

ד. עבור אלו ערכי $m$ פתרון המערכת:

i. יהיה ברביע השני.

ii. יהיה מתחת לציר ה- $x$.

iii. יהיה מימין לציר ה- $y$.

**3)** לפניכם מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-2x+3y=\left(k-\frac{x}{2}\right)^2+4\\ x-10=k(1-y)\end{cases}$.

א. מצאו לאלו ערכי $k$ יש למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

**4)** לפניכם מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}k(x-1)=1-2y\\ \frac{2x+3}{k}=3-y\end{cases}$.

א. מצאו לאלו ערכי $k$ יש למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

**5)** לפניכם מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} k^2(1-x)=k+9x+12y \\ x=1-\dfrac{2(y+1)}{k} \end{cases}$.

א. מצאו לאלו ערכי $k$ יש למערכת המשוואות:
i. פתרון יחיד.
ii. אינסוף פתרונות.
iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

**6)** נתונה מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} (2-k)x-y=k \\ 3x+ky=-1 \end{cases}$.

א. מצאו את הערך של $k$ עבורו $(2,7)$ הוא פתרון של מערכת המשוואות.

ב. האם יש למשוואה פתרונות נוספים עבור הערך של $k$ שמצאת בסעיף הקודם?

ג. האם קיים ערך של $k$ עבורו למערכת המשוואות לא יהיו פתרונות כלל? אם כן מצאו אותו.

**7)** לפניכם מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} ax+b^2y=a^2 \\ 3x+by=9b \end{cases}$.

א. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. הראו שכאשר $a=3b$ יש למערכת אינסוף פתרונות.

ג. עבור אלו ערכי $a$ ו- $b$ הפתרון היחיד של המערכת יהיה $(4,3)$?

**8)** לפניך מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} amx+y=m^2 \\ bx+my=-9m \end{cases}$.

א. מצאו ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$ אם ידוע כי כאשר $m=4$ פתרון המשוואה הוא $(4,0)$.

ב. הוכיחו את הטענות הבאות:
i. לכל ערך של $m$ יש למערכת פתרון ממשי.
ii. פתרון המערכת תמיד יהיה $(m,0)$.

ג. העזרו בסעיף הקודם וקבעו איזו משוואה מבין שלושת המשוואות הבאות לא תכיל את הפתרון היחיד הנ"ל:
i. $7y+2m=2x$.
ii. $my=2x-m$.
iii. $m(y-mx)=2x-m(m^2+2)$.

**9)** לפניך הישרים הבאים: $\begin{cases} x+(k-9)y=8 \\ x-\frac{14y}{k}=1 \end{cases}$.

א. עבור אלו ערכי $k$ הישרים הללו מקבילים?
ב. הביעו באמצעות $k$ את נקודת החיתוך של הישרים.
ג. עבור איזה ערך של $k$ נקודת החיתוך של הישרים תהיה על הישר: $y=x-8$ ?

**10)** לפניכם שני הישרים: $\begin{cases} (k^2+6)x+ay=15 \\ kx+ay=3 \end{cases}$, $a,k$ פרמטרים, $a\neq 0$.

א. הוכיחו כי לכל ערך של $k$ הישרים הללו נחתכים.
ב. מצאו את $a$ אם ידוע כי כאשר $k=6$ נקודת החיתוך היא $\left(1,\frac{1}{3}\right)$.
ג. עבור איזה ערך של $k$ נקודת החיתוך תהיה $(2,1)$?
ד. הראו כי נקודת החיתוך של הישרים נמצאת על גרף הפונקציה: $\frac{4y}{x}=k^2-5k+6$.

## תשובות סופיות:

1) א. i. $a \neq \pm 1$ ii. $a=-1$ iii. $a=1$ ב. $-1<a<0$

2) א. $\left(\frac{m}{m-1}, \frac{m-2}{m-1}\right)$ , $m \neq 1,-5$

ב. פתרון יחיד: $m \neq 1,-5$, אינסוף פתרונות: $m=-5$, אף פתרון: $m=1$.

ג. הוכחה.

ד. i. $1<m<2$ ii. $0<m<1$ iii. $m>2$, $m<1$, $m \neq -5$.

3) א. i. $k \neq 3,-1$ ii. $k=3$ iii. $k=-1$ ב. $\left(\frac{8}{k+1}, \frac{k^2+3k+10}{k+1}\right)$.

4) א. i. $k \neq 0,\pm 2$ ii. $k=2$ iii. $k=0,-2$ ב. $\left(\frac{3k+1}{k+2}, \frac{k-3}{k+2}\right)$.

5) א. i. $k \neq 0,3$ ii. $k=3$ iii. $k=0$ ב. $\left(\frac{6-k}{2k-6}, \frac{k-4}{k-3}\right)$.

6) א. $k=-1$ ב. כן. ג. $k=3$.

7) א. $\left(-\frac{3a}{b}, a+3b\right)$ ג. $b=2$ , $a=-2$.

8) א. $b=-9$ , $a=1$ ג. ii

9) א. $k=2,7$ ב. $\left(\frac{7k}{k^2-9k+14}, \frac{k^2-9k+112}{k^2-9k+14}\right)$ ג. $k=8$

10) א. הוכחה. ב. $a=1$ ג. $k=1$.

# חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם שורשים:

## שאלות:

**1)** לפניכם המשוואה: $(m-1)x=\sqrt{m-1}$.

מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות $m$).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

**2)** לפניכם המשוואה: $\frac{mx}{\sqrt{3x-2}}=\frac{x-m}{\sqrt{3x-2}}+\sqrt{3x-2}$.

מצאו עבור אלו ערכי $m$ יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות $m$).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

## תשובות סופיות:

**1)** א. פתרון יחיד: $m>1$ והוא: $x=\frac{1}{\sqrt{m-1}}$ ב. $m=1$ ג. $m<1$.

**2)** א. פתרון יחיד: $\frac{6}{5}<m<4$ והוא: $x=\frac{m+2}{4-m}$. ב. אינסוף: $\varnothing$. ג. אף פתרון: $m\geq 4$ , $m\leq\frac{6}{5}$.

GOOL
בשביל התירגול

# חקירה של משוואות ממעלה ראשונה עם ערך מוחלט:

## סיכום כללי:

הגדרת ערך מוחלט: $|x|=\begin{cases}x & x\ge 0\\ -x & x<0\end{cases}$.

- משוואה מהצורה: $|A|=|B|$ תפוצל לשתי משוואות: $A=B$ או: $A=-B$.
  יש לחקור כל מקרה בנפרד ולאחד פתרונות.
- עבור משוואות המכילות ביטויים עם ערכים מוחלטים יש להפריד עבור כל מקרה לפי הגדרת הערך המוחלט. לבסוף יש לאחד פתרונות.
- למשוואה מהצורה: $|x|=k$ (כאשר $x$ הוא המשתנה ו-$k$ הוא פרמטר) יתכנו:
  - שני פתרונות אם $k>0$.
  - פתרון אחד (והוא $x=0$) אם $k=0$.
  - אף פתרון אם $k<0$.

## שאלות:

**1)** חקור את המשוואה הבאה: $|x-2m|=|x+1|$.

**2)** חקור את המשוואה הבאה: $|mx-3x|=|x-m|$.

**3)** חקור את המשוואה הבאה: $\frac{mx^2}{|x|-1}-m|x|=2m+1$.

**4)** נתונה מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}y+|x-2|=3\\ |x+y|=m\end{cases}$.

מצא עבור אלו ערכי $m$ יש למערכת:

א. פתרון אחד בלבד.

ב. שני פתרונות שונים.

ג. אינסוף פתרונות.

## תשובות סופיות:

1) פתרון יחיד: $m \neq -\frac{1}{2}$.  אף פתרון: $\varnothing$.  אינסוף: $m = -\frac{1}{2}$ .

2) פתרון יחיד: $m = 0$ והוא $x = 0$.  אף פתרון: $\varnothing$.
שני פתרונות: $m \neq 0$ והם: $x_{1,2} = -\frac{2m}{3}, \frac{12m}{5}$ .

3) עבור: $m = -\frac{1}{2}$ יש פתרון יחיד: $x = 0$ .
עבור: $m > 0$ , $-\frac{1}{2} < m < 0$ , $m < -1$ יש שני פתרונות.
עבור: $m = 0$ , $-1 < m < -0.5$ אין פתרון כלל.

4) א. $m = 0, m > 5$  ב. $0 < m < 5$  ג. $m = 5$ .