

# מכינת מתמטיקה לקראת לימודי הנדסה ברמת 4 יחידות

פרק 20 - חקירה פרמטרית - חקירת משוואה ממעלה ראשונה

תוכן העניינים

1. פתרון משוואות ממעלה ראשונה עם פרמטר ..... 1
2. חקירת משוואות ממעלה ראשונה ..... 2
3. חקירה של מערכת שתי משוואות ממעלה ראשונה ..... 5
4. חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם שורשים ..... 10
5. חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם ערך מוחלט ..... 11

## פתרון משוואות ממעלה ראשונה עם פרמטר:

### סיכום כללי:

#### שלבי עבודה:

- נפתור את המשוואה.
- נאתר את ערכי הפרמטר המאפשרים את המכנה בכל שלבי הפתרון.
- נבדוק לכל ערך כזה בנפרד כמה פתרונות יש למשוואה על ידי הצבתו במשוואה המקורית.

### שאלות:

(1) פתרו את המשוואה:  $kx + 6k = 2x + 3k^2$ .

(2) פתרו את המשוואה:  $a^2(x-1) = 3ax + 4(x-a)$ .

(3) פתרו את מערכת המשוואות: 
$$\begin{cases} 2kx + 5y = 2k^2 \\ 2x - y = -10 \end{cases}$$

(4) פתרו את מערכת המשוואות הבאה: 
$$\begin{cases} bx - (1-2b)y = 1 \\ (2b+1)x + 3(by-1) = 0 \end{cases}$$

### תשובות סופיות:

(1)  $x = 3k \quad (k \neq 2)$

(2)  $x = \frac{a}{a+1}$

(3)  $(k-5, 2k)$

(4)  $\left( \frac{2-b}{b(b+1)}, \frac{1}{b+1} \right), \quad b \neq 0, \pm 1$

## חקירה של משוואה ממעלה ראשונה:

### שאלות:

(1) נתונה המשוואה הבאה:  $m^2(2x-1) = 9(x-1) - x(6+5m)$ .

מצאו לאילו ערכי  $m$  יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ומצאו אותו).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

(2) נתונה המשוואה:  $k^2(5-2x) = 3(15-2kx)$ .

א. מצאו לאילו ערכי  $k$  למשוואה:

i. פתרון יחיד.

ii. אף פתרון.

iii. אינסוף פתרונות.

ב. מצאו לאילו ערכי  $k$  פתרון המשוואה:

i. חיובי.

ii. מקיים את אי-השוויון:  $2x-3 > x$ .

(3) נתונה המשוואה:  $\frac{mx}{m-2} = \frac{2m}{m-5} - \frac{6x}{m^2-7m+10}$ .

מצאו לאילו ערכי  $m$  למשוואה:

א. פתרון יחיד.

ב. אף פתרון.

ג. אינסוף פתרונות.

(4) לפניכם המשוואה:  $m \cdot \frac{x-1}{x} - \frac{m+6}{m} = \frac{-3}{x}$ .

א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. מצאו עבור אלו ערכי  $m$  יש למשוואה:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ג. האם עבור ערכי ה- $m$  הנותנים אינסוף פתרונות, כל  $x$  יהיה פתרון של המשוואה?

ד. עבור אלו ערכי  $m$  יהיה פתרון המשוואה גדול מ-2?

$$(5) \quad \text{נתונה המשוואה: } x(m^2 - 9) = 2(m(3x+1) + 1 - x)$$

- א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.  
 ב. חקרו את המשוואה ומצא עבור אלו ערכי  $m$  יש למשוואה:  
 i. פתרון יחיד.  
 ii. אינסוף פתרונות.  
 iii. אף פתרון.  
 ג. עבור איזה ערך של  $m$  פתרון המשוואה יהיה:  $x = 2$ ?

$$(6) \quad \text{נתונה המשוואה: } \frac{5}{k-4} - \frac{kx}{3k+15} = \frac{k^2+29}{k^2+k-20}$$

- א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.  
 ב. האם קיים ערך של  $k$  עבורו יש למשוואה אינסוף פתרונות?  
 ג. עבור איזה ערך של  $k$  פתרון המשוואה הוא:  $-4$ ?

$$(7) \quad \text{לפניכם המשוואה הבאה: } \frac{m^2x}{m-5} + \frac{2mx - m^2 + 1}{m-5} = 1$$

מצאו עבור אלו ערכי  $m$  יש למשוואה:

- א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות  $m$ ).  
 ב. אינסוף פתרונות.  
 ג. אף פתרון.

$$(8) \quad \text{לפניכם המשוואה הבאה: } \frac{(m^2+1)x-4}{x-2} = m+1$$

מצאו עבור אלו ערכי  $m$  יש למשוואה:

- א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות  $m$ ).  
 ב. אינסוף פתרונות.  
 ג. אף פתרון.

$$(9) \quad \text{לפניכם המשוואה הבאה: } \frac{5m-2}{mx-1} = -3$$

מצאו עבור אלו ערכי  $m$  יש למשוואה:

- א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות  $m$ ).  
 ב. אינסוף פתרונות.  
 ג. אף פתרון.

$$(10) \text{ לפניכם המשוואה הבאה: } \frac{x+1}{x-m+1} = \frac{x}{x+m+2}$$

מצאו עבור אלו ערכי  $m$  יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות  $m$ ).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

### תשובות סופיות:

$$(1) \text{ א. } \frac{1}{2}, m \neq -3, \frac{m-3}{2m-1} \text{ ב. } m = -3 \text{ ג. } m = \frac{1}{2}$$

$$(2) \text{ א. } 1, 3, k \neq 0, 3 \text{ ב. } k = 0 \text{ ג. } k = 3$$

$$\text{ב. } k > 0 \text{ או } k < -3 \text{ וגם } k \neq 3 \text{ ג. } 0 < k < 15 \text{ וגם } k \neq 3$$

$$(3) \text{ א. } 2, 3, 5, m \neq 2, 3, 5 \text{ ב. } m = 2, 3, 5 \text{ ג. אף } m$$

$$(4) \text{ א. } m \neq 3, x = \frac{1}{m+2} \text{ ב. פתרון יחיד: } m \neq 0, -2, 3, \text{ אף פתרון:}$$

$$\text{ג. לא, רק: } x \neq 0 \text{ ד. } m = 0, -2, \text{ אינסוף פתרונות: } m = 3$$

$$\text{ד. } -2 < m < -1.5$$

$$(5) \text{ א. } m \neq 7, -1, x = \frac{1}{m-7} \text{ ב. פתרון יחיד: } m \neq 7, -1, \text{ אף פתרון: } m = 7,$$

אינסוף פתרונות:  $m = -1$ .

$$(6) \text{ א. } -5, -4, 0, k \neq 0, 4, -5, x = \frac{3}{k} - 3 \text{ ב. אף } k \text{ ג. } k = -3$$

$$(7) \text{ א. } 5, -2, m \neq 0 \text{ ב. אף } m \text{ ג. } m = 0, -2, 5$$

$$(8) \text{ א. } \pm 1, m \neq 0 \text{ ב. } m = 1 \text{ ג. } m = 0, -1$$

$$(9) \text{ א. } \frac{2}{5}, m \neq 0 \text{ ב. אף } m \text{ ג. } m = \frac{2}{5}, 0$$

$$(10) \text{ א. } -\frac{1}{2}, -2, -1, m \neq 0 \text{ ב. אף } m \text{ ג. } m = 0, -1, -2, -\frac{1}{2}$$

## חקירה של מערכת שתי משוואות ממעלה ראשונה:

**סיכום כללי:**

**שלבי עבודה:**

- נפתור את מערכת המשוואות.
- נאתר את ערכי הפרמטר המאפסים את המכנה בכל שלבי הפתרון.
- נבדוק לכל ערך כזה בנפרד כמה פתרונות יש למערכת על ידי הצבתו.

**המשמעות הגרפית של חקירת מערכת משוואות ממעלה ראשונה:**

בהינתן מערכת שתי משוואות מהצורה:  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$  נאמר כי:

אם:  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$  אז הישרים נחתכים (כלומר למערכת פתרון יחיד).

אם:  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$  אז הישרים מקבילים (כלומר למערכת אף פתרון).

אם:  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$  אז הישרים מתלכדים (כלומר למערכת אינסוף פתרונות).

**שאלות:**

$$(1) \quad \begin{cases} x + 3ay = a \\ ax + 3y = 4a - 3 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת המשוואות:}$$

א. מצאו לאלו ערכי  $a$  למערכת המשוואות:

- פתרון יחיד.
- אף פתרון.
- אינסוף פתרונות.

ב. מצאו לאלו ערכי  $a$  נקודת החיתוך בין הישרים (המיוצגים על ידי המשוואות) נמצאת ברביע השלישי.

$$(2) \quad \begin{cases} (m+4)x + 5y = m+8 \\ x + my = m+2 \end{cases} \quad \text{נתונות מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. מצאו עבור אלו ערכי  $m$  יש למערכת:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ג. פתרון המערכת מייצג נקודה במערכת צירים.

הוכיחו כי נקודה זו נמצאת על הישר:  $y(m-1) = 2(m-1)x + 4 - m$ .

ד. עבור אלו ערכי  $m$  פתרון המערכת:

i. יהיה ברביע השני.

ii. יהיה מתחת לציר ה- $x$ .

iii. יהיה מימין לציר ה- $y$ .

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{4} - 2x + 3y = \left(k - \frac{x}{2}\right)^2 + 4 \\ x - 10 = k(1 - y) \end{cases} \quad \text{לפניכם מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. מצאו לאלו ערכי  $k$  יש למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

$$(4) \quad \begin{cases} k(x-1) = 1 - 2y \\ \frac{2x+3}{k} = 3 - y \end{cases} \quad \text{לפניכם מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. מצאו לאלו ערכי  $k$  יש למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

$$(5) \quad \begin{cases} k^2(1-x) = k + 9x + 12y \\ x = 1 - \frac{2(y+1)}{k} \end{cases} \quad \text{לפניכם מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. מצאו לאלו ערכי  $k$  יש למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

$$(6) \quad \begin{cases} (2-k)x - y = k \\ 3x + ky = -1 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. מצאו את הערך של  $k$  עבורו  $(2,7)$  הוא פתרון של מערכת המשוואות.

ב. האם יש למשוואה פתרונות נוספים עבור הערך של  $k$  שמצאת בסעיף הקודם?

ג. האם קיים ערך של  $k$  עבורו למערכת המשוואות לא יהיו פתרונות כלל?

אם כן מצאו אותו.

$$(7) \quad \begin{cases} ax + b^2y = a^2 \\ 3x + by = 9b \end{cases} \quad \text{לפניכם מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. הראו שכאשר  $a = 3b$  יש למערכת אינסוף פתרונות.

ג. עבור אלו ערכי  $a$  ו- $b$  הפתרון היחיד של המערכת יהיה  $(4,3)$ ?

$$(8) \quad \begin{cases} amx + y = m^2 \\ bx + my = -9m \end{cases} \quad \text{לפניך מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. מצאו ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  אם ידוע כי כאשר  $m = 4$  פתרון המשוואה הוא  $(4,0)$ .

ב. הוכיחו את הטענות הבאות:

i. לכל ערך של  $m$  יש למערכת פתרון ממשי.

ii. פתרון המערכת תמיד יהיה  $(m,0)$ .

ג. העזרו בסעיף הקודם וקבע איזו משוואה מבין שלושת המשוואות

הבאות לא תכיל את הפתרון היחיד הנ"ל:

i.  $7y + 2m = 2x$

ii.  $my = 2x - m$

iii.  $m(y - mx) = 2x - m(m^2 + 2)$

$$(9) \quad \begin{cases} x + (k-9)y = 8 \\ x - \frac{14y}{k} = 1 \end{cases} \quad \text{לפניך הישרים הבאים:}$$

- א. עבור אלו ערכי  $k$  הישרים הללו מקבילים?  
 ב. הביעו באמצעות  $k$  את נקודת החיתוך של הישרים.  
 ג. עבור איזה ערך של  $k$  נקודת החיתוך של הישרים תהיה על הישר:  $y = x - 8$ ?

$$(10) \quad \text{לפניכם שני הישרים:} \quad \begin{cases} (k^2 + 6)x + ay = 15 \\ kx + ay = 3 \end{cases} \quad a, k \text{ פרמטרים, } a \neq 0$$

- א. הוכיחו כי לכל ערך של  $k$  הישרים הללו נחתכים.  
 ב. מצאו את  $a$  אם ידוע כי כאשר  $k = 6$  נקודת החיתוך היא  $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ .  
 ג. עבור איזה ערך של  $k$  נקודת החיתוך תהיה  $(2, 1)$ ?  
 ד. הראו כי נקודת החיתוך של הישרים נמצאת

$$\text{על גרף הפונקציה: } \frac{4y}{x} = k^2 - 5k + 6$$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. i. } a \neq \pm 1 \quad \text{ii. } a = -1 \quad \text{iii. } a = 1 \quad \text{ב. } -1 < a < 0$$

$$(2) \quad \text{א. } m \neq 1, -5, \left( \frac{m-2}{m-1}, \frac{m}{m-1} \right)$$

ב. פתרון יחיד:  $m \neq 1, -5$ , אינסוף פתרונות:  $m = -5$ , אף פתרון:  $m = 1$ .  
 ג. הוכחה.

$$(3) \quad \text{א. i. } 1 < m < 2 \quad \text{ii. } 0 < m < 1 \quad \text{iii. } m < 1, m > 2, m \neq -5$$

$$(3) \quad \text{א. i. } k \neq 3, -1 \quad \text{ii. } k = 3 \quad \text{iii. } k = -1 \quad \text{ב. } \left( \frac{k^2 + 3k + 10}{k+1}, \frac{8}{k+1} \right)$$

$$(4) \quad \text{א. i. } k \neq 0, \pm 2 \quad \text{ii. } k = 2 \quad \text{iii. } k = 0, -2 \quad \text{ב. } \left( \frac{k-3}{k+2}, \frac{3k+1}{k+2} \right)$$

$$(5) \quad \text{א. i. } k \neq 0, 3 \quad \text{ii. } k = 3 \quad \text{iii. } k = 0 \quad \text{ב. } \left( \frac{k-4}{k-3}, \frac{6-k}{2k-6} \right)$$

$$(6) \quad \text{א. } k = -1 \quad \text{ב. כן.} \quad \text{ג. } k = 3$$

$$(7) \quad \text{א. } \left( a + 3b, -\frac{3a}{b} \right) \quad \text{ג. } a = -2, b = 2$$

$$(8) \quad \text{א. } a = 1, b = -9 \quad \text{ג. ii.}$$

$$(9) \quad \text{א. } k = 2, 7 \quad \text{ב. } \left( \frac{k^2 - 9k + 112}{k^2 - 9k + 14}, \frac{7k}{k^2 - 9k + 14} \right) \quad \text{ג. } k = 8$$

$$(10) \quad \text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. } a = 1 \quad \text{ג. } k = 1$$

## חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם שורשים:

### שאלות:

(1) לפניכם המשוואה:  $(m-1)x = \sqrt{m-1}$ .

מצאו עבור אלו ערכי  $m$  יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות  $m$ ).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

(2) לפניכם המשוואה:  $\frac{x-m}{\sqrt{3x-2}} + \sqrt{3x-2} = \frac{mx}{\sqrt{3x-2}}$ .

מצאו עבור אלו ערכי  $m$  יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות  $m$ ).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

### תשובות סופיות:

(1) א. פתרון יחיד:  $m > 1$  והוא:  $x = \frac{1}{\sqrt{m-1}}$  ב.  $m = 1$  ג.  $m < 1$ .

(2) א. פתרון יחיד:  $\frac{6}{5} < m < 4$  והוא:  $x = \frac{m+2}{4-m}$  ב. אינסוף:  $\emptyset$  ג. אף פתרון:  $m \geq 4$ ,  $m \leq \frac{6}{5}$ .

## חקירה של משוואות ממעלה ראשונה עם ערך מוחלט:

### סיכום כללי:

$$\cdot |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \text{ : הגדרת ערך מוחלט}$$

- משוואה מהצורה:  $|A| = |B|$  תפוצל לשתי משוואות:  $A = B$  או  $A = -B$ . יש לחקור כל מקרה בנפרד ולאחד פתרונות.
- עבור משוואות המכילות ביטויים עם ערכים מוחלטים יש להפריד עבור כל מקרה לפי הגדרת הערך המוחלט. לבסוף יש לאחד פתרונות.
- למשוואה מהצורה:  $|x| = k$  (כאשר  $x$  הוא המשתנה ו- $k$  הוא פרמטר) יתכנו:
  - שני פתרונות אם  $k > 0$ .
  - פתרון אחד (והוא  $x = 0$ ) אם  $k = 0$ .
  - אף פתרון אם  $k < 0$ .

### שאלות:

$$(1) \text{ חקור את המשוואה הבאה: } |x - 2m| = |x + 1|$$

$$(2) \text{ חקור את המשוואה הבאה: } |mx - 3x| = |x - m|$$

$$(3) \text{ חקור את המשוואה הבאה: } \frac{mx^2}{|x| - 1} - m|x| = 2m + 1$$

$$(4) \text{ נתונה מערכת המשוואות הבאה: } \begin{cases} y + |x - 2| = 3 \\ |x + y| = m \end{cases}$$

מצא עבור אלו ערכי  $m$  יש למערכת:

- א. פתרון אחד בלבד.
- ב. שני פתרונות שונים.
- ג. אינסוף פתרונות.

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{פתרון יחיד: } m \neq -\frac{1}{2} \quad \text{אף פתרון: } \emptyset \quad \text{אינסוף: } m = -\frac{1}{2}$$

$$(2) \quad \text{פתרון יחיד: } m = 0 \text{ והוא } x = 0 \quad \text{אף פתרון: } \emptyset$$

$$\text{שני פתרונות: } m \neq 0 \text{ והם: } x_{1,2} = -\frac{2m}{3}, \frac{12m}{5}$$

$$(3) \quad \text{עבור: } m = -\frac{1}{2} \text{ יש פתרון יחיד: } x = 0$$

$$\text{עבור: } m > 0, -\frac{1}{2} < m < 0, m < -1 \text{ יש שני פתרונות.}$$

$$\text{עבור: } m = 0, -1 < m < -0.5 \text{ אין פתרון כלל.}$$

$$(4) \quad \text{א. } m = 0, m > 5 \quad \text{ב. } 0 < m < 5 \quad \text{ג. } m = 5$$