

פיזיקה קוונטית 1

פרק 9 - חלקיקים זהים

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים.....1

חלקיקים זהים

פונקציית הגל של חלקיקים זהים

רקע תיאורטי

פונקציית גל של שני חלקיקים

$$P(a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d) = \int_c^d \int_a^b |\Psi(x_1, x_2, t)|^2 dx_1 dx_2$$

ההמילטוניאן שח המערכת צריך להיות

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + V(x_1, x_2, t)$$

אם הפוטנציאל לא תלוי בזמן אז

$$\Psi(x_1, x_2, t) = \psi(x_1, x_2) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

עבור שני חלקיקים הנמצאים במצבים $\psi_a(x)$ ו- $\psi_b(x)$ אורתונורמליים, פונקציית הגל היא:

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2) \text{ או } \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)$$

אם החלקיקים הם בוזונים / פרמיונים זהים אז פונקציית הגל צריכה להיות סימטרית / אנטי-סימטרית להחלפה של החלקיקים בהתאמה.

המבנה של פונקציית גל מרחבית סימטרית (סימן פלוס) / אנטי סימטרית (סימן מינוס):

$$\Psi_{\pm}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) \pm \psi_a(x_2)\psi_b(x_1)]$$

שימו לב שפונקציית הגל הכללית צריכה לקיים את תנאי הסימטריה ובאופן כללי צריך להתחשב גם בספין.

שאלות

(1) פונקציית הגל של בוזונים ופרמיונים והסבר לעיקרון האיסור של פאולי

$$| \Psi(x_1, x_2) |^2 = | \Psi(x_2, x_1) |^2$$

הוכיחו את הטענה כי אם

$$\Psi(x_1, x_2) = \pm \Psi(x_2, x_1)$$

אז

הדרכה: הניחו מקרה כללי שבו

$$\Psi(x_1, x_2) = \alpha \psi_a(x_1) \psi_b(x_2) + \beta \psi_a(x_2) \psi_b(x_1)$$

ו- $\Psi(x_1, x_2) = \gamma \Psi(x_2, x_1)$, כאשר $|\gamma| = 1$.

(2) קבוע הנרמול

- א. נניח כי $\psi_a(x)$ ו- $\psi_b(x)$ הן פונקציות אורתונורמליות שהמכפלה הפנימית שלהם מתאפסת.
- מצאו את קבוע הנרמול A של פונקציית הגל הכללית.
- ב. חזרו על סעיף א' עבור המקרה שבו $\psi_a(x) = \psi_b(x)$ (כמובן שמקרה זה תקף רק לבוזונים).

(3) פונקציית גל של 3 חלקיקים

- הניחו שישנם שלושה חלקיקים: אחד במצב $\psi_a(x)$, השני במצב $\psi_b(x)$, והשלישי במצב $\psi_c(x)$. הניחו גם שכל הפונקציות אורתונורמליות.
- מצאו פונקציית גל המתארת את מערכת שלושת החלקיקים עבור המקרים הבאים:
- א. החלקיקים שונים.
- ב. החלקיקים הם בוזונים זהים.
- ג. החלקיקים הם פרמיונים זהים (רמז: השתמשו בדטרמיננטת סלייטר).

(4) שני חלקיקים בבור פוטנציאל

- שני חלקיקים בעלי מסה m נמצאים בבור פוטנציאל ברוחב l . הניחו כי אין אינטראקציה בין החלקיקים.
- מצאו את פונקציית הגל והאנרגיות של מצב הייסוד והמצב המעורר הראשון, וציינו אם יש ניוון באנרגיה עבור כל אחד מהמצבים הבאים:
- א. החלקיקים שונים.
- ב. החלקיקים הם בוזונים זהים.
- ג. החלקיקים הם פרמיונים זהים.
- ד. רשמו את ההמילטוניאן של המערכת והראו כי פונקציות הגל של סעיף ג' הן אכן פונקציות עצמיות עם הערכים העצמיים המתאימים.

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \text{ פונקציית הגל של חלקיק יחיד בבור פוטנציאל היא}$$

$$\alpha = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2} \text{ כאשר } E_n = \alpha n^2 \text{ והאנרגיה היא}$$

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) א. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ב. $\frac{1}{2}$

3) א. $\psi(x_1, x_2, x_3) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3)$

ב.
$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\begin{aligned} &\psi_a(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3) + \psi_a(x_1)\psi_b(x_3)\psi_c(x_2) + \\ &\psi_a(x_2)\psi_b(x_1)\psi_c(x_3) + \psi_a(x_3)\psi_b(x_1)\psi_c(x_2) + \\ &\psi_a(x_3)\psi_b(x_2)\psi_c(x_1) + \psi_a(x_2)\psi_b(x_3)\psi_c(x_1) \end{aligned} \right]$$

ג.
$$\begin{aligned} &\psi_a(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3) + \psi_b(x_1)\psi_c(x_2)\psi_a(x_3) + \psi_a(x_1)\psi_c(x_2)\psi_b(x_3) + \\ &\psi_b(x_1)\psi_a(x_2)\psi_c(x_3) + \psi_c(x_1)\psi_b(x_2)\psi_a(x_3) \end{aligned}$$

4) א. מצב ייסוד: $E = 2\alpha$; אין ניוון. $\psi(x_1, x_2) = \frac{2}{l} \sin\left(\frac{\pi}{l}x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{l}x_2\right)$

מצב מעורר ראשון: $E = 5\alpha$; ניוון 2. $\psi_{12}(x_1, x_2) = \frac{2}{l} \sin\left(\frac{\pi}{l}x_1\right) \sin\left(\frac{2\pi}{l}x_2\right)$

$\psi_{21}(x_1, x_2) = \frac{2}{l} \sin\left(\frac{2\pi}{l}x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{l}x_2\right)$

ב. מצב ייסוד: זהה לסעיף א'.

מצב מעורר ראשון: $E = 5\alpha$; אין ניוון.

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{2}{l} \sin\left(\frac{\pi}{l}x_1\right) \sin\left(\frac{2\pi}{l}x_2\right) + \frac{2}{l} \sin\left(\frac{\pi}{l}x_2\right) \sin\left(\frac{2\pi}{l}x_1\right) \right]$$

ג. מצב ייסוד: $E = 5\alpha$; אין ניוון.

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{2}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sin\left(\frac{\pi}{l}x_1\right) \sin\left(\frac{2\pi}{l}x_2\right) - \sin\left(\frac{\pi}{l}x_2\right) \sin\left(\frac{2\pi}{l}x_1\right) \right]$$

מצב מעורר ראשון: $E = 10\alpha$; אין ניוון.

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{2}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sin\left(\frac{\pi}{l}x_1\right) \sin\left(\frac{3\pi}{l}x_2\right) - \sin\left(\frac{\pi}{l}x_2\right) \sin\left(\frac{3\pi}{l}x_1\right) \right]$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + V(x_1, x_2) \quad \text{ד.}$$

$$V(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x_1 \text{ and } 0 \leq x_2 \leq l \\ \infty & \text{else} \end{cases}$$

כוח ההחלפה – Exchange Forces

רקע תיאורטי

ריבוע המרחק הממוצע של שני חלקיקים שונים

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle_a - 2 \langle x \rangle_a \langle x \rangle_b$$

$$\langle x \rangle_a = \int x |\psi_a(x)|^2 dx$$

ריבוע המרחק הממוצע של חלקיקים עם פונקציה מרחבית סימטרית / אנטי סימטרית

$$\langle \Delta x^2 \rangle_{\pm} = \langle \Delta x^2 \rangle_d \mp 2 |\langle x \rangle_{ab}|^2$$

$$\langle x \rangle_{ab} = \int \psi_a(x) \psi_b(x) dx$$

קשר קוולנטי

קשר קוולנטי נוצר כאשר יש אלקטרונים במצב ספין אנטי-סימטרי (עבור שני אלקטרונים זהו מצב הסינגלט). מצב הספין האנטי-סימטרי מאלץ את פונקציית הגל המרחבית של האלקטרונים להיות סימטרית ולקרוב בין האלקטרונים. המטען העודף של האלקטרונים כשהם מתקרבים מושך את הגרעינים של האטומים ויוצר את הקשר.