

תורת ההסתברות

פרק 49 - חישוב תוחלת ושונות על ידי פירוק לאינדיקטורים

תוכן העניינים

1. כללי 1

חישוב תוחלת ושונות על ידי פירוק לאינדיקטורים:

רקע:

נלמד שיטה לחישוב תוחלת ושונות של משתנה מקרי, על ידי פירוק לסכום של משתני אינדיקטור. אינדיקטור הינו משתנה שפונקציית ההסתברות של נראית כך:

X	1	0
$P(X)$	P	$1-P$

נגיד ש- X_i הינו משתנה אינדיקטור כאשר: $i=1,2,\dots,n$ ו- $X = \sum_{i=1}^n X_i$.

ניעזר בנוסחאות תוחלת ושונות סכום משתנים מקרים כדי לחשב את התוחלת והשונות של X .

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \cdot \sum_{i < j} \text{COV}(X_i, X_j)$$

כאשר עבור משתנים אינדיקטורים מתקיים ש:

$$E(X_i) = P(X_i = 1)$$

$$V(X_i) = P(X_i = 1) \cdot P(X_i = 0)$$

$$\text{COV}(X_i, X_j) = P(X_i = 1, X_j = 1) - P(X_i = 1)P(X_j = 1)$$

דוגמא (פתרון בהקלטה):

יוסי החליט להזמין 8 חברים למסיבת יום הולדתו. הוא הכין 8 הזמנות שעליהן רשם את השם של כל אחד מהחברים. ההזמנות הוכנסו למעטפות וחולקו באקראי ל-8 החברים. נסמן ב- X את מספר ההזמנות שהגיעו לחבר הנכון. חשבו את $E(X)$ ואת $V(X)$.

שאלות:

- (1) יהיו X ו- Y משתני אינדיקטורים. הוכיחו ש:
- $E(X) = P(X=1)$.
 - $V(X) = P(X=1) \cdot [1 - P(X=1)]$.
 - $COV(X, Y) = P(X=1, Y=1) - P(X=1)P(Y=1)$.
- (2) 400 אנשים נבחרו מכלל האוכלוסייה.
- א. חשבו את הסיכוי שביום מסוים בשנה יהיה בדיוק אדם אחד מתוך ה-400 שיש לו יום הולדת.
 - ב. נגדיר את X_i משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם ביום i בדיוק אדם אחד מתוך ה-400 עם יום הולדת באותו היום. חשבו את התוחלת והשונות של X_i .
 - ג. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הימים בשנה שבהם יש יום הולדת בדיוק לאחד מ-400 האנשים הללו.
- (3) 3 משחקים הוכנסו באקראי ל-5 מגרות. מגירה יכולה להכיל יותר ממשחק אחד. נסמן ב- W את מספר המגרות בהן בדיוק משחק אחד. חשבו את התוחלת והשונות של W על ידי פירוק לאינדיקטורים.
- (4) A, B ו- C הם שלושה מאורעות כך ש: $P(A) = 0.3, P(B) = 0.2, P(C) = 0.1$. נגדיר את Y להיות מספר המאורעות מתוך השלושה שמתקיימים. חשבו את התוחלת והשונות של Y כאשר:
- א. המאורעות בלתי תלויים זה בזה.
 - ב. $C \subset B \subset A$.
 - ג. A, B ו- C זרים זה לזה.
- (5) נטיל קובייה 10 פעמים. נסמן ב- W את מספר התוצאות השונות שהתקבלו.
- א. מצאו את $E(W)$.
 - ב. מצאו את $V(W)$.

- (6) נסדר בשורה 6 כוסות קולה ו-4 כוסות מים. רצף של שתי כוסות נקרא "ג'נק", אם שתי הכוסות הן ברצף של קולה. נסמן ב- X את מספר הרצפים מסוג "ג'נק" שיש לשתי כוסות. למשל, הסידור הבא:
- קולה, מים, קולה, מים, קולה, מים, קולה, מים, קולה, קולה, $X = 2$.
- חשבו את התוחלת והשונות של X .
- (7) נסדר בשורה n זוגות גרביים באקראי (בסך הכול $2n$ גרבים). חשבו את התוחלת והשונות של מספר הזוגות מתוך n הזוגות שבהם זוג הגרביים אינם עומדים זה לצד זה.
- (8) בקייטנה 100 ילדים. מחלקים לכל ילד 2 ארטיקים מתוך 200 הארטיקים שנרכשו לקייטנה. מתוך 200 הארטיקים שנרכשו 100 בטעם תות ו-100 הם בטעם לימון. נסמן ב- X את מספר הילדים שקיבלו 2 ארטיקים בטעמים שונים. נסמן ב- Y את מספר הילדים שקיבלו שני ארטיקים בטעם לימון.
- א. חשבו את התוחלת והשונות של X .
- ב. בטאו את Y כפונקציה של X וחשבו את התוחלת והשונות של Y .
- ג. מהי השונות המשותפת של X ו- Y ?

תשובות סופיות:

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) א. 0.3667. ב. תוחלת: 0.3667, שונות: 0.2322.
- ג. תוחלת: 133.85, שונות: 88.89.
- (3) תוחלת: 1.92, שונות: 1.1136.
- (4) א. תוחלת: 0.6, שונות: 0.46. ב. תוחלת: 0.6, שונות: 1.04.
- ג. תוחלת: 0.6, שונות: 0.24.
- (5) א. 5.03. ב. 0.568.
- (6) תוחלת: 3, שונות: $\frac{2}{3}$.
- (7) תוחלת: $n-1$, שונות: $1 - \frac{1}{n} + \frac{n-1}{2(2n-1)}$.
- (8) א. תוחלת: 50.251, שונות: 25.126.
- ב. $Y = -0.5X + 50$. ג. -12.563.