מבוא להסתברות לסטטיסטיקאים

פרק 35 - חישוב תוחלת ושונות על ידי פירוק לאינדיקטורים

תוכן העניינים

חישוב תוחלת ושונות על ידי פירוק לאינדיקטורים:

רקע:

נלמד שיטה לחישוב תוחלת ושונות של משתנה מקרי, על ידי פירוקו לסכום של משתני אינדקטור. אינדיקטור הינו משתנה שפונקציית ההסתברות של נראית כך:

X	1	0
$P(X)$	P	$1-P$

נגיד ש-X_i הינו משתנה אינדיקטור כאשר: $i=1,2,\dots,n$ ו- $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$.

ניעזר בנוסחאות תוחלת ושונות סכום משתנים מקרים כדי לחשב את התוחלת והשונות של X.

$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$V(X)=V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} V(X_i)+2\cdot\sum_{i<j} COV\left(X_{i,}X_j\right)$$

כאשר עבור משתנים אינדיקטורים מתקיים ש:

$$E(X_i)=P(X_i=1)$$

$$V(X_i)=P(X_i=1)\cdot P(X_i=0)$$

$$COV\left(X_i,X_j\right)=P\left(X_i=1,X_j=1\right)-P\left(X_i=1\right)P\left(X_j=1\right)$$

דוגמא (פתרון בהקלטה):

יוסי החליט להזמין 8 חברים למסיבת יום הולדתו. הוא הכין 8 הזמנות שעליהן רשם את השם של כל אחד מהחברים. ההזמנות הוכנסו למעטפות וחולקו באקראי ל-8 החברים. נסמן ב- X את מספר ההזמנות שהגיעו לחבר הנכון.

חשבו את $E(X)$ ואת $V(X)$.

שאלות:

1) יהיו X ו- Y משתני אינדיקטורים. הוכיחו ש:

א. $E(X)=P(X=1)$.

ב. $V(X)=P(X=1)\cdot[1-P(X=1)]$.

ג. $COV(X,Y)=P(X=1,Y=1)-P(X=1)P(Y=1)$.

2) 400 אנשים נבחרו מכלל האוכלוסייה.

א. חשבו את הסיכוי שביום מסוים בשנה יהיה בדיוק אדם אחד מתוך ה-400 שיש לו יום הולדת.

ב. נגדיר את X_i משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם ביום i בדיוק אדם אחד מתוך ה-400 עם יום הולדת באותו היום.
חשבו את התוחלת והשונות של X_i.

ג. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הימים בשנה שבהם יש יום הולדת בדיוק לאחד מ-400 האנשים הללו.

3) 3 משחקים הוכנסו באקראי ל-5 מגרות. מגירה יכולה להכיל יותר ממשחק אחד.
נסמן ב- W את מספר המגרות בהן בדיוק משחק אחד.
חשבו את התוחלת והשונות של W על ידי פירוק לאינדיקטורים.

4) A, B ו-C הם שלושה מאורעות כך ש: $P(A)=0.3$, $P(B)=0.2$, $P(C)=0.1$.
נגדיר את Y להיות מספר המאורעות מתוך השלושה שמתקיימים.
חשבו את התוחלת והשונות של Y כאשר:

א. המאורעות בלתי תלויים זה בזה.

ב. $C\subset B\subset A$.

ג. A, B ו-C זרים זה לזה.

5) נטיל קובייה 10 פעמים. נסמן ב- W את מספר התוצאות השונות שהתקבלו.

א. מצאו את $E(W)$.

ב. מצאו את $V(W)$.

6) נסדר בשורה 6 כוסות קולה ו-4 כוסות מים. רצף של שתי כוסות נקרא "ג'נק", אם שתי הכוסות הן ברצף של קולה. נסמן ב- X את מספר הרצפים מסוג "ג'נק" שיש לשתי כוסות. למשל, הסידור הבא:
קולה, מים, מים, קולה, מים, קולה, מים, קולה, קולה, קולה, $X=2$.
חשבו את התוחלת והשונות של X.

7) נסדר בשורה n זוגות גרביים באקראי (בסך הכול $2n$ גרבים).
חשבו את התוחלת והשונות של מספר הזוגות מתוך n הזוגות שבהם זוג הגרביים אינם עומדים זה לצד זה.

8) בקייטנה 100 ילדים. מחלקים לכל ילד 2 ארטיקים מתוך 200 הארטיקים שנרכשו לקייטנה. מתוך 200 הארטיקים שנרכשו 100 בטעם תות ו-100 הם בטעם לימון. נסמן ב- X את מספר הילדים שקיבלו 2 ארטיקים בטעמים שונים. נסמן ב- Y את מספר הילדים שקיבלו שני ארטיקים בטעם לימון.
א. חשבו את התוחלת והשונות של X.
ב. בטאו את Y כפונקציה של X וחשבו את התוחלת והשונות של Y.
ג. מהי השונות המשותפת של X ו- Y?

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.

2) א. 0.3667. ב. תוחלת: 0.3667, שונות: 0.2322.
ג. תוחלת: 133.85, שונות: 88.89.

3) תוחלת: 1.92, שונות: 1.1136.

4) א. תוחלת: 0.6, שונות: 0.46. ב. תוחלת: 0.6, שונות: 1.04.
ג. תוחלת: 0.6, שונות: 0.24.

5) א. 5.03. ב. 0.568.

6) תוחלת: 3, שונות: $\frac{2}{3}$.

7) תוחלת: $n-1$, שונות: $1-\frac{1}{n}+\frac{n-1}{2(2n-1)}$.

8) א. תוחלת: 50.251, שונות: 25.126.
ב. $Y=-0.5X+50$. ג. -12.563.