# הסתברות א

## פרק 35 - חישוב תוחלת ושונות על ידי פירוק לאינדיקטורים

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

# חישוב תוחלת ושונות על ידי פירוק לאינדיקטורים:

## רקע:

נלמד שיטה לחישוב תוחלת ושונות של משתנה מקרי, על ידי פירוקו לסכום של משתני אינדקטור. אינדיקטור הינו משתנה שפונקציית ההסתברות של נראית כך:

| $X$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| $P(X)$ | $P$ | $1-P$ |

נגיד ש-$X_i$ הינו משתנה אינדיקטור כאשר: $i=1,2,\ldots,n$ ו- $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$.

ניעזר בנוסחאות תוחלת ושונות סכום משתנים מקרים כדי לחשב את התוחלת והשונות של $X$.

$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$$

$$V(X)=V\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}V(X_i)+2\cdot\sum_{i<j}COV(X_i,X_j)$$

כאשר עבור משתנים אינדיקטורים מתקיים ש:

$$E(X_i)=P(X_i=1)$$
$$V(X_i)=P(X_i=1)\cdot P(X_i=0)$$
$$COV(X_i,X_j)=P(X_i=1,X_j=1)-P(X_i=1)P(X_j=1)$$

**דוגמא (פתרון בהקלטה):**

יוסי החליט להזמין 8 חברים למסיבת יום הולדתו. הוא הכין 8 הזמנות שעליהן רשם את השם של כל אחד מהחברים. ההזמנות הוכנסו למעטפות וחולקו באקראי ל-8 החברים. נסמן ב- $X$ את מספר ההזמנות שהגיעו לחבר הנכון.
חשבו את $E(X)$ ואת $V(X)$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** יהיו $X$ ו- $Y$ משתני אינדיקטורים. הוכיחו ש:

א. $E(X)=P(X=1)$.

ב. $V(X)=P(X=1)\cdot\left[1-P(X=1)\right]$.

ג. $COV(X,Y)=P(X=1,Y=1)-P(X=1)P(Y=1)$.

**2)** 400 אנשים נבחרו מכלל האוכלוסייה.

א. חשבו את הסיכוי שביום מסוים בשנה יהיה בדיוק אדם אחד מתוך ה-400 שיש לו יום הולדת.

ב. נגדיר את $X_i$ משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם ביום $i$ בדיוק אדם אחד מתוך ה-400 עם יום הולדת באותו היום.
חשבו את התוחלת והשונות של $X_i$.

ג. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הימים בשנה שבהם יש יום הולדת בדיוק לאחד מ-400 האנשים הללו.

**3)** 3 משחקים הוכנסו באקראי ל-5 מגרות. מגירה יכולה להכיל יותר ממשחק אחד.
נסמן ב- $W$ את מספר המגרות בהן בדיוק משחק אחד.
חשבו את התוחלת והשונות של $W$ על ידי פירוק לאינדיקטורים.

**4)** $A$, $B$ ו-$C$ הם שלושה מאורעות כך ש: $P(A)=0.3$ , $P(B)=0.2$ , $P(C)=0.1$.
נגדיר את $Y$ להיות מספר המאורעות מתוך השלושה שמתקיימים.
חשבו את התוחלת והשונות של $Y$ כאשר:

א. המאורעות בלתי תלויים זה בזה.

ב. $C\subset B\subset A$.

ג. $A$, $B$ ו-$C$ זרים זה לזה.

**5)** נטיל קובייה 10 פעמים. נסמן ב- $W$ את מספר התוצאות השונות שהתקבלו.

א. מצאו את $E(W)$.

ב. מצאו את $V(W)$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**6)** נסדר בשורה 6 כוסות קולה ו-4 כוסות מים. רצף של שתי כוסות נקרא "ג'נק", אם שתי הכוסות הן ברצף של קולה. נסמן ב- $X$ את מספר הרצפים מסוג "ג'נק" שיש לשתי כוסות. למשל, הסידור הבא:
קולה, מים, מים, קולה, מים, קולה, מים, קולה, קולה, קולה, $X=2$.
חשבו את התוחלת והשונות של $X$.

**7)** נסדר בשורה $n$ זוגות גרביים באקראי (בסך הכול $2n$ גרבים).
חשבו את התוחלת והשונות של מספר הזוגות מתוך $n$ הזוגות שבהם זוג הגרביים אינם עומדים זה לצד זה.

**8)** בקייטנה 100 ילדים. מחלקים לכל ילד 2 ארטיקים מתוך 200 הארטיקים שנרכשו לקייטנה. מתוך 200 הארטיקים שנרכשו 100 בטעם תות ו-100 הם בטעם לימון. נסמן ב- $X$ את מספר הילדים שקיבלו 2 ארטיקים בטעמים שונים. נסמן ב- $Y$ את מספר הילדים שקיבלו שני ארטיקים בטעם לימון.

א. חשבו את התוחלת והשונות של $X$.

ב. בטאו את $Y$ כפונקציה של $X$ וחשבו את התוחלת והשונות של $Y$.

ג. מהי השונות המשותפת של $X$ ו- $Y$?

## תשובות סופיות:

**1)** שאלת הוכחה.

**2)** א. 0.3667. ב. תוחלת: 0.3667, שונות: 0.2322.
ג. תוחלת: 133.85, שונות: 88.89.

**3)** תוחלת: 1.92, שונות: 1.1136.

**4)** א. תוחלת: 0.6, שונות: 0.46. ב. תוחלת: 0.6, שונות: 1.04.
ג. תוחלת: 0.6, שונות: 0.24.

**5)** א. 5.03. ב. 0.568.

**6)** תוחלת: 3, שונות: $\frac{2}{3}$.

**7)** תוחלת: $n-1$, שונות: $1-\frac{1}{n}+\frac{n-1}{2(2n-1)}$.

**8)** א. תוחלת: 50.251, שונות: 25.126.
ב. $Y=-0.5X+50$. ג. -12.563.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל