

# יסודות האנליזה

פרק 8 - חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות

תוכן העניינים

1. נגזרת הפונקציה ההפוכה
2. נגזרת מסדר גבוה
3. נוסחת לייבניץ
4. גזירה פרמטרית

## נגזרת הפונקציה ההפוכה

### שאלות

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחאות הבאות:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2)$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (3)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## נגזרת מסדר גבוה

### שאלות

חשבו את הנגזרת ה- $n$ ,  $f^{(n)}(x)$ , של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{1}{x+a} \quad (1)$$

$$y = \frac{2x+3}{x^2-3x+2} \quad (2)$$

$$y = \frac{x}{(x^2-1)(x-2)} \quad (3)$$

$$y = \frac{x^4}{x^2-1} \quad (4)$$

### תשובות סופיות

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot (x+a)^{-n-1} \quad (1)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot \left( -5(x-1)^{-n-1} + 7(x-2)^{-n-1} \right) \quad (2)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot \left( -\frac{1}{2}(x-1)^{-n-1} - \frac{1}{6}(x+1)^{-n-1} + \frac{2}{3}(x-2)^{-n-1} \right) \quad (3)$$

$$y' = 2x - \frac{1}{2} \left( (x-1)^{-2} - (x+1)^{-2} \right), \quad y'' = 2 + \left( (x-1)^{-3} - (x+1)^{-3} \right) \quad (4)$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} (-1)^n \cdot n! \cdot \left( (x-1)^{-n-1} - (x+1)^{-n-1} \right), (n > 2)$$

## נוסחת לייבניץ

### שאלות

חשבו את הנגזרת העשירית,  $y^{(10)}$ , של הפונקציות הבאות:

$$y = x^3 e^x \quad (1)$$

$$y = x^3 \sin 5x \quad (2)$$

### תשובות סופיות

$$(e^x \cdot x^3)^{(10)} = e^x [x^3 + 103x^2 + 456x + 120 \cdot 6] \quad (1)$$

$$(\sin 5x \cdot x^3)^{(10)} = -5^{10} x^3 \sin 5x + 6 \cdot 5^{10} x^2 \cos 5x + 54 \cdot 5^9 x \sin 5x - 24 \cdot 5^9 \cos 5x \quad (2)$$

## גזירה פרמטרית

### שאלה

1) חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה הבאה,

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases} \quad \text{הנתונה בצורה פרמטרית}$$

### תשובה

$$y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}, \quad y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3} \quad (1)$$