# מתמטיקה א

## פרק 11 - חישוב נגזרת של פונקציה

### תוכן העניינים


1. כללי הגזירה ..... (ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה ..... 1
3. גזירה סתומה ..... 4
4. כלל השרשרת ..... 6
5. גזירה לוגריתמית ..... 9
6. נגזרת הפונקציה ההפוכה ..... 10
7. תרגילים נוספים לפי סוגים ..... 11

# תרגול בכללי הגזירה

## שאלות

גזרו <u>פעמיים</u> את הפונקציות הבאות (בשאלות **22-24** מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

**1)** $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$

**2)** $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x+10}$

**3)** $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

**4)** $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

**5)** $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

**6)** $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

**7)** $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

**8)** $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

**9)** $f(x)=x\cdot\ln x$

**10)** $f(x)=x^2\cdot\ln x$

**11)** $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

**12)** $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$

**13)** $f(x)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$

**14)** $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

**15)** $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

**16)** $f(x)=x\cdot e^{-2x^2}$

**17)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

**18)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

**19)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$

**20)** $y=\sqrt[x]{x}$

**21)** $y=x^{\sqrt{x}}$

**22)** $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$

**23)** $y=\left(x^2+1\right)^x$

**24)** $y=(x+1)^{(x+1)}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

## תשובות סופיות

**1** $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2},\quad f''(x)=\frac{4}{x^3}$

**2** $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2},\quad f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$

**3** $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3},\quad f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$

**4** $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2},\quad f''(x)=\frac{4x\cdot(2x^2+24)}{(x^2-4)^3}$

**5** $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3},\quad f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$

**6** $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4},\quad f''(x)=12\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$

**7** $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},\quad f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

**8** $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x^{1.5}},\quad f''(x)=\frac{3\ln x-8}{4x^{2.5}}$

**9** $f'(x)=\ln x+1,\quad f''(x)=\frac{1}{x}$

**10** $f'(x)=x(2\ln x+1),\quad f''(x)=2\ln x+3$

**11** $f'(x)=\frac{1}{2(2-x)},\quad f''(x)=\frac{1}{(4-2x)^2}$

**12** $f'(x)=\frac{2}{x}(\ln x+1),\quad f''(x)=\frac{-2\ln x}{x^2}$

**13** $f'(x)=\frac{2}{x}\left[\frac{(\ln x)^4-1}{(\ln x)^3}\right],\quad f''(x)=-\frac{2}{x^2}\left\{\frac{(\ln x)^5-(\ln x)^4-(\ln x)-3}{(\ln x)^4}\right\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

**14** $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)$

**15** $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5x+2}{x^4}\right)$

**16** $f'(x)=e^{-2x^2}(1-4x^2),\quad f''(x)=-4xe^{-2x^2}(3-4x^2)$

**17** $f'(x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9\cdot\sqrt[3]{x^4}}$

**18** $f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}},\quad f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{-\frac{1}{3}x^2-1}{(x^2-1)^{5/3}}$

**19** $f'(x)=\frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$

**20** $y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$

**21** $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2}+1\right)$

**22** $y'=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\sqrt{x}\right)$

**23** $y'=\left(x^2+1\right)^x\left(1\cdot\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x\cdot x\right)$

**24** $y'=(x+1)^{(x+1)}\left[\ln(x+1)+1\right]$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

# גזירה סתומה

## שאלות

**1)** גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2+y^5-1=1$.

**2)** גזרו את הפונקציה הסתומה $4\ln x+10\ln y=y^2$.

**3)** גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}$.

**4)** מצאו את משואת המשיק למעגל $x^2+y^2=25$, בנקודה $(3,4)$.

**5)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2+y-x=xy$, דרך הנקודה $(1,1)$.

**6)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$x^2y+e^{y^2-4x}=\ln x+1$,
דרך הנקודה $(1,2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.

**7)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $\sqrt{xy+y}+x^2y=xy^2$,
דרך הנקודה $(1,2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.

**8)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $e^{xy^2}+y=y^2-1$,
דרך הנקודה $(0,2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.

**9)** נתונה הפונקציה הסתומה $x+y\cdot e^y=xy^2+x^2$.

א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y=0$.

ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.

**10)** גזרו את הפונקציה הסתומה: $x^y-xy=10$.

**11)** גזרו את הפונקציה הסתומה: $x^y-y^x=1$.

**12)** נתונה פונקציה סתומה $xy-y^3+x^2-x=0$.
מצאו את ערך $y^n$ בנקודה בה $y=1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

**13)** נתון כי המשוואה $h(y)-x+1=2x^3+4e^y+2y$ ,
מגדירה את $y=y(x)$ כפונקציה סתומה של $x$.
נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.
הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

## תשובות סופיות

**1)** $y'=\frac{-2x}{5y^4-1}$ $\quad 5y^4-1\neq 0,$

**2)** $y'=\frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y}-2y}$ $\quad \frac{10}{y}-2y\neq 0,$

**3)** $y'=\frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}}$ $\quad \sqrt{x}\neq 0,\quad \sqrt{x}\neq 1,$

**4)** $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$

**5)** $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

**6)** $y=\frac{1}{5}x+1\frac{4}{5}$

**7)** $y=\frac{1}{5}x+1\frac{4}{5}$

**8)** $y=\frac{4}{3}x+2$

**9)** א. $(0,0),\ (1,0)$.

ב. בראשית הצירים: $y=-x$ , המשוואה השנייה: $y=x-1$.

**10)** $y'=\frac{y-x^y\cdot\frac{y}{x}}{x^y\cdot\ln x-x}$ $\quad x^y\cdot\ln x-x\neq 0,$

**11)** $y'=\frac{-x^y\cdot\frac{y}{x}+y^x\cdot\ln y}{x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}}$ $\quad x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}\neq 0,$

**12)** -1

**13)** הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

# כלל השרשרת

## שאלות

**1)** נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4)=10$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f(x^2)$.
חשבו את $g'(2)$.

**2)** נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(2)=4$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

א. חשבו את $g'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי $f$ עולה. הוכיחו כי $g$ יורדת.

**3)** נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1)=e$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=x^2+f(\ln x)$.

א. חשבו את $g'(e)$.

ב. הוכיחו שהפונקציה $g$ עולה בנקודה $x=e$.

ג. חשבו את הגבול $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(e+h)-g(e)}{h}$.

**4)** נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f(1)=-2,\quad f'(1)=e$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f^2(\ln x)$.

א. חשבו את $g'(e)$.

ב. האם $g$ עולה או יורדת, בנקודה $x=e$?

ג. נתון כי $f$ שלילית ועולה. מה ניתן לומר על $g$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

**5)** נתונה פונקציה, $f(x)$ , יורדת וחיובית.

נגדיר פונקציה חדשה $g(x)=\sqrt{f\left(x^2+4\right)}$ .

מי מהבאים נכון?

א. $g$ עולה לכל $x$ .

ב. $g$ יורדת לכל $x$ .

ג. $g$ עולה לכל $x>0$ .

ד. $g$ יורדת לכל $x>0$ .

**6)** נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^2\left(\sqrt{x}\right)-1}{f\left(\sqrt{x}\right)}$ .

ידוע כי $f(10)=f'(10)=4$ . חשבו $g'(100)$ .

**7)** נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)+4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$ .

ידוע כי $f'(1)=4$ , $f(1)=1$ .

חשבו $g'(1)$ .

**8)** נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^2(\ln x)}{f(\ln x)+1}$ .

ידוע כי $f'(0)=1$ , $f(0)=2$ .

חשבו $g'(1)$ .

**9)** נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^{10}(4x)+1}{f\left(\frac{4}{x}\right)+1}$ .

ידוע כי $f'(4)=2$ , $f(4)=1$ .

חשבו $g'(1)$ .

**10)** נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{\sqrt[4]{f^7\left(x^2\right)}}{f\left(x^4\right)}$ .

ידוע כי $f'(1)=4$ , $f(1)=1$ .

חשבו $g'(1)$ .


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

## תשובות סופיות

1) 40

1) א. -16 ב. שאלת הוכחה.

2) א. $2e+1$ ב. שאלת הוכחה. ג. $2e+1$

3) א. -4 ב. יורדת. ג. $g'(x)<0$

4) ד

5) $\frac{17}{80}$

6) 36

7) $\frac{8}{9}$

8) 44

9) -2


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

# גזירה לוגריתמית

## שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות:

**1)** $y=\sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}}\cdot\sqrt[10]{(2x+1)^7}$

**1)** $y=\left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x}$

**2)** $y=\frac{(x+2)^{3x+4}\cdot(5x+6)}{(7x+8)\cdot(9x+10)}$

## תשובות סופיות

**1)** $y'=y\left[\frac{1}{4}\frac{1}{10x-1}\cdot 10+\frac{7}{10}\frac{1}{2x+1}\cdot 2-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}\right]$

**2)** $y'=\left((10x+1)^{\frac{1}{4}}\right)^{2^x}\cdot\frac{1}{4}\left[2^x\cdot\ln 2\cdot\ln(10x+1)+\frac{1}{10x+1}\cdot 10\cdot 2^x\right]$

**3)** $y'=y\left[3\cdot\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}(3x+4)+\frac{1}{5x+6}\cdot 5-\frac{1}{7x+8}\cdot 7-\frac{1}{9x+10}\cdot 9\right]$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

# נגזרת הפונקציה ההפוכה

## שאלה

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחה הבאה:

**1)** $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

לתשובה מלאה בסרטון וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

# תרגילים נוספים לפי סוגים

## שאלות

### הנגזרת של פונקציית חזקה

**1)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3$ ב. $f(x)=x^7$ ג. $f(x)=x^2$

ד. $f(x)=x^1$ ה. $f(x)=x^{-3}$ ו. $f(x)=x^{-1}$

ז. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ ח. $f(x)=x\frac{1}{3}$ ט. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$

### הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

**2)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=2x^3$ ב. $f(x)=3x^7$ ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^4$

ד. $f(x)=\frac{x^6}{7}$ ה. $f(x)=8x^1$ ו. $f(x)=3x^{-2}$

ז. $f(x)=\frac{4}{x}$ ח. $f(x)=6x^{\frac{1}{2}}$ ט. $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

### הנגזרת של קבוע

**3)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=12$ ב. $f(x)=\frac{7}{8}$

### הנגזרת של סכום והפרש

**4)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$ ב. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

### הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

**5)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x-2)^3$ ב. $f(x)=(x^3+6)^5$ ג. $f(x)=3(x-x^2)^2$

ד. $f(x)=\frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x)=\frac{2(x+1)^4}{3}$

### הנגזרת של אחד חלקי איקס

**6)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{x}$ ב. $f(x)=\frac{2}{x}$ ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ד. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x)=\frac{2}{3-x}$ ז. $f(x)=\frac{6}{x+5}$

### הנגזרת של מכפלה

**7)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x+1)(x-3)$

ב. $f(x)=(5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x)=x^3(6-x)^4$

### הנגזרת של מנה

**8)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x)=\frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x)=\frac{1}{x}$ ו. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

### הנגזרת של שורש

**9)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$ ב. $f(x)=4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x)=x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

## תשובות סופיות

**1)**

א. $f'(x)=3x^2$ ב. $f'(x)=7x^6$ ג. $f'(x)=2x$

ד. $f'(x)=1$ ה. $f'(x)=3x^{-4}$ ו. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

ז. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $f'(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$

**2)**

א. $f'(x)=6x^2$ ב. $f'(x)=21x^6$ ג. $f'(x)=2x^3$

ד. $f'(x)=\frac{6x^5}{7}$ ה. $f'(x)=8$ ו. $f'(x)=-\frac{6}{x^3}$

ז. $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$ ח. $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $f'(x)=\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$

**3)** א. 0 ב. 0

**4)** א. $f'(x)=3x^2+4x-3$ ב. $f'(x)=x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$

**5)** א. $f'(x)=15(5x-x)^2$ ב. $f'(x)=15x^2(x^3+6)^4$

ג. $f'(x)=6(x-x^2)(1-2x)$ ד. $f'(x)=-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $f'(x)=\frac{8(x+1)^3}{3}$

**6)** א. $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{x^2}$ ג. $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$ ד. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

ה. $f'(x)=-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$ ו. $f'(x)=\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $f'(x)=-\frac{6}{(x+3)^2}$

**7)** א. $f'(x)=10x-14$ ב. $f'(x)=(5x+1)^2(20x-44)$

ג. $f'(x)=x^2(6-x)^3(18-7x)$

**8)** א. $f'(x)=\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $f'(x)=\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $f'(x)=\frac{8x}{(x^2+3)^2}$

ד. $f'(x)=\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$ ה. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ו. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

**9)** א. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$

ד. $f'(x)=\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $f'(x)=\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$ ו. $f'(x)=\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©