

רענון במתמטיקה מספר 500-5-0010

פרק 24 - חילוק פולינומים ופתרון משוואות פולינומאליות

תוכן העניינים

1. חילוק פולינומים.....1
2. פתרון משוואות.....2

חילוק פולינומים:

סיכום כללי:

בחילוק פולינום $p(x)$ בפולינום $q(x)$ (נכתב: $\overline{p(x)}|q(x)$) יש לבצע 4 שלבים:

- (1) חלוקת האיבר במעלה הגבוהה ביותר של $p(x)$ באיבר במעלה הגבוהה ביותר של $q(x)$.
- (2) רישום תוצאת החילוק בצד והכפלתה בכל הפולינום המחלק $q(x)$.
- (3) חיסור של תוצאת ההכפלה בפולינום המחולק $p(x)$.
- (4) חזרה לשלב הראשון כאשר מבצעים את חילוק האיבר במעלה הגבוהה ביותר של $q(x)$ בתוצאת החיסור.

התהליך מסתיים כאשר לא ניתן לחלק עוד.
במידה ותוצאת החיסור האחרונה מניבה ביטוי שמעלתו קטנה משל האיבר המחלק ב- $q(x)$ אז נתייחס לביטוי זה כאל שארית החלוקה.

שאלות:

בצע את חילוק הפולינומים הבאים:

$\frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x - 1} \quad (2)$	$\frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2} \quad (1)$
$\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x - 3} \quad (4)$	$\frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x + 3} \quad (3)$
$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} \quad (6)$	$\frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x + 5} \quad (5)$
$\frac{4x^2 + x - 1}{x - 2} \quad (8)$	$\frac{4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10}{x^2 - x + 10} \quad (7)$

תשובות סופיות:

$x^2 - x - 3 \quad (4)$	$x^3 - 2x^2 + 5x - 1 \quad (3)$	$x^2 + 2x + 5 \quad (2)$	$x - 7 \quad (1)$
$4x + 9 + \frac{17}{x - 2} \quad (8)$	$4x^2 + 10x + 1 \quad (7)$	$x^2 + 1 \quad (6)$	$x^2 - 4 \quad (5)$

פתרון משוואות:

סיכום כללי:

משפטים כלליים:

- לכל משוואה פולינומאלית ממעלה n יש בדיוק n שורשים.
- אם לפולינום שורש מרוכב $a+bi$ אז גם המספר הצמוד $a-bi$ הוא שורש שלו.
- יהי $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ פולינום שכל מקדמיו מספרים שלמים. אם לפולינום שורש שהוא מספר שלם, אז הוא מחלק את האיבר החופשי a_0 .
- אם $x=a$ שורש של פולינום $p(x)$, אז הפולינום $p(x)$ מתחלק ב- $x-a$ ללא שארית.
- אם $p(x)$ פולינום ואם $p(a)=0$ וגם $p'(a)=0$ אז $x=a$ הוא שורש כפול.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(1) \quad k^4 + 3k^3 - 15k^2 - 19k + 30 = 0 \quad (2) \quad k^3 + 2k^2 - 3k + 20 = 0$$

$$(3) \quad k^5 + 3k^4 + 2k^3 - 2k^2 - 3k - 1 = 0 \quad (4) \quad k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0$$

$$(5) \quad k^6 - 3k^4 + 3k^2 - 1 = 0 \quad (6) \quad k^3 - k^2 + k - 1 = 0$$

$$(7) \quad k^4 - 3k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad k_1 = 1, k_2 = -2, k_3 = 3, k_4 = -5 \quad (2) \quad k_1 = -4, k_{2,3} = 1 \pm 2i$$

$$(3) \quad k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = -1, k_4 = -1, k_5 = -1 \quad (4) \quad k_1 = 2, k_2 = 2, k_3 = 2$$

$$(5) \quad k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 1, k_4 = -1, k_5 = 1, k_6 = -1 \quad (6) \quad k_1 = 1, k_{2,3} = \pm i$$

$$(7) \quad k_1 = 1, k_2 = 2, k_{3,4} = \pm 2i$$