

# חשמל ומגנטיות 83313 לתלמידי הנדסת חשמל ופיזיקה יישומית

פרק 3 - חוק גאוס

תוכן העניינים

1. הסברים בסיסיים..... 1
2. תרגול נוסף..... 6

## הסברים בסיסיים:

רקע:

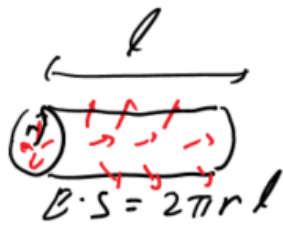
חוק גאוס:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{in}$$

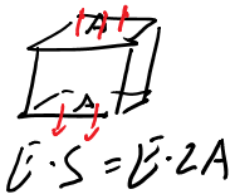
$$Q_{in} = \int \rho dV$$

 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$  נקרא השטף של השדה החשמלי ומסומן ב  $\phi_E$ 

המקרים של חוק גאוס:



1. תיל / גליל / מעטפת גלילית אינסופיים.  
במקרים האלו נבנה מעטפת גלילית והשטף יהיה  $E2\pi r l$ , כאשר  $l$  ו- $r$  הם אורך ורדיוס המעטפת.



2. מישור אינסופי.  
במקרים האלו נבנה מעטפת בצורת קובייה והשטף יהיה  $E2A$ , כאשר  $A$  זה שטח הפאות המקבילות למשטח.



3. כדור / קליפה כדורית.  
במקרים האלו נבנה מעטפת כדורית והשטף יהיה  $E4\pi r^2$ , כאשר  $r$  זה רדיוס המעטפת.

שדה של תיל אינסופי:

$$\vec{E} = \frac{\lambda \hat{r}}{2\pi\epsilon_0 r}$$

 $\lambda$  צפיפות מטען ליחידת אורך של התיל.

שדה של מישור אינסופי (דק):

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$\sigma$  צפיפות מטען ליחידת שטח של הלוח.

שדה מחוץ לכדור / קליפה כדורית:

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2} \hat{r}$$

כמו מטען נקודתי.

חוק דאוס הדיפרנציאלי:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

## שאלות:



- (1) **שדה של קליפה כדורית**  
 נתונה קליפה כדורית בעלת רדיוס  $R$ .  
 מצאו את השדה בכל המרחב.

(2) **שדה של כדור**

- נתון כדור בעל רדיוס  $R$  וצפיפות מטען פחית אחידה  $\rho$ .  
 מצאו את השדה בכל המרחב.



- (3) **שדה של כדור עם צפיפות לא אחידה**  
 נתון כדור בעל רדיוס  $R$  וצפיפות התלויה במרחק ממרכז הכדור.  $r$  קבוע ונתון:  $\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}$ .  
 מצאו את התפלגות השדה במרחב (בתוך ומחוץ לכדור).

(4) **שדה של תיל אינסופי**

- נתון תיל אינסופי בעל צפיפות  $\lambda$ .  
 מצאו את השדה במרחב.

(5) **שדה של גליל אינסופי**

- נתון גליל אינסופי בעל צפיפות מטען ליחידת נפח  $\rho$  ורדיוס  $R$ .  
 מצאו את השדה במרחב.

(6) **קליפה גלילית עבה**

- קליפה גלילית עבה בעלת רדיוס פנימי  $a$ ,  
 רדיוס חיצוני  $b$  וגובה  $H$  טעונה בצפיפות מטען  
 נפחית  $\rho(r) = \frac{c}{r}$ , כאשר  $c$  קבוע נתון ו- $r$  הוא  
 המרחק מציר הסימטריה של הקליפה.  
 א. מצא את המטען הכולל בקליפה.  
 ב. מצא את השדה בכל המרחב אם:  $H \gg a, b$ .

(7) **שדה של לוח אינסופי**

- נתון משטח אינסופי בעל צפיפות מטען ליחידת שטח  $\sigma$ .  
 מצאו את השדה במרחב.

8) לוח עם עובי



נתון מישור בעל שטח A ועובי d.  
המישור טעון בצפיפות מטען קבועה  
ליחידת נפח  $\rho$ .

- מצאו את השדה רחוק מאוד מהמישור.
- מצאו את השדה קרוב מאוד למישור ובתוכו (השתמש בקירובים).
- מניחים אלקטרון בגובה  $Z_0 < \frac{d}{2}$ , מצאו את מיקום האלקטרון כפונקציה של הזמן בהנחה שצפיפות המטען במישור חיובית.

9) מישור עבה עם צפיפות אנטי סימטרית



מישור אינסופי בעל עובי d טעון בצפיפות מטען  
כתלות במרחק ממרכז המישור  $\rho(z) = Az$ ,  
A קבוע נתון.  
מצאו את השדה החשמלי בכל המרחב  
שיוצר המטען במישור.

10) מישור עבה עם צפיפות משתנה



מישור אינסופי בעובי 2d טעון בצפיפות מטען  
משתנה  $\rho(z) = 7Az^6$ , כאשר A קבוע נתון.  
ציר ה-z אנך למישור וראשיתו במרכז המישור  
(המישור אינסופי ב-x, y, ראה ציור).

- מצאו את השדה החשמלי בכל המרחב.
- הראו שחוק גאוס הדיפרנציאלי מתקיים בכל המרחב.
- מצאו את הרוטור של השדה החשמלי  $\vec{V} \times \vec{E}$  בכל המרחב, והסבר את התוצאה.

## תשובות סופיות:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{KQ}{r^2} \hat{r} & R < r \end{cases} \quad (1)$$

$$E = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r} & r < R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} & R < r \end{cases} \quad (2)$$

$$E = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0 R} & r < R \\ \frac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0 r^2} & r > R \end{cases} \quad (3)$$

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{r} \hat{r} \quad (4)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \hat{r} \quad (5)$$

$$\vec{E} = \frac{C(b-a)}{\epsilon_0 r} \hat{r} \quad (6)$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & z < 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$z(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{|e|\rho}{\epsilon_0 m}} t\right) \quad \text{ג.} \quad \vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \hat{z} & z > \frac{d}{2} \\ -\frac{\rho d}{2\epsilon_0} \hat{z} & z < -\frac{d}{2} \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \vec{E} = \frac{k\rho d A}{r^2} \hat{r} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$\vec{E} = -\frac{A}{\epsilon_0 z} \left[ \left(\frac{d}{2}\right)^2 - z^2 \right] \hat{z} \quad (9)$$

$$\text{ג. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} A \cdot z^7 \hat{z} \quad \text{א.} \quad (10)$$

## תרגול נוסף:

### שאלות:



- (1) שתי קליפות גליליות חלולות נתונות שתי קליפות (חלולות) גליליות אינסופיות בעלות ציר סימטריה משותף. רדיוס הקליפה הפנימית הוא  $R_1$  וצפיפות המטען המשטחית בה היא  $\sigma_1$ . רדיוס הקליפה החיצונית הוא  $R_2$  וצפיפות המטען בה היא  $\sigma_2$ . מצא את השדה החשמלי בכל המרחב.



- (2) קליפה גלילית עבה בעלת רדיוס פנימי  $a$ , רדיוס חיצוני  $b$  וגובה  $H$  טעונה בצפיפות מטען נפחית  $\rho(r) = \frac{c}{r}$ , כאשר  $c$  קבוע נתון ו- $r$  הוא המרחק מציר הסימטריה של הקליפה. א. מצא את המטען הכולל בקליפה. ב. מצא את השדה בכל המרחב אם:  $H \gg a, b$ .



- (3) משטח ושתי קליפות כדוריות שתי קליפות כדוריות בעלות רדיוסים שונים  $a < b$ , נמצאות במרחק  $d > 2b$  אחת מעל השנייה. הקליפות טעונות במטענים  $q_1, q_2$  בהתאמה. במאונך לציר המחבר בין הקליפות ומתחת לקליפה התחתונה (עם רדיוס  $b$ ) מונח מישור אינסופי הטעון בצפיפות מטען ליחידת שטח  $\sigma$ . מצא את השדה בנקודות הבאות.
- א.  $p_1$  הנמצאת במרכז הקליפה בעלת רדיוס  $a$ .
  - ב.  $p_2$  הנמצאת במרכז הקליפה בעלת רדיוס  $b$ .
  - ג.  $p_3$  הנמצאת במרחק  $\frac{d}{2}$  מתחת למרכז הקליפה התחתונה אך מעל המישור.

**(4) שני מישורים בזווית**



- שני מישורים אינסופיים טעונים בצפיפות מטען ליחידת שטח  $\sigma$ . המישורים נמצאים בזווית  $\alpha$  אחד מהשני.
- א. מצא את השדה החשמלי בין המישורים ומעל המישור האופקי.
- ב. מצא את השדה מעל שני המישורים.

**(5) שלושה לוחות בזווית**

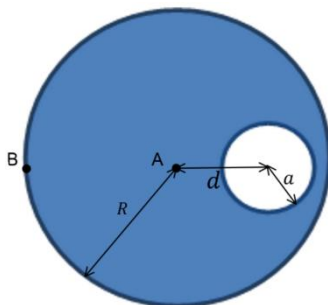


- באיור מתוארת מערכת של שלושה לוחות אינסופיים (אינסופיים פנימה והחוצה מהדף) בעלי צפיפות מטען משטחית זהה  $\sigma$ .
- א. חשבו את השדה בכל נקודה במרחב על ידי סופרפוזיציה של השדות של כל לוח בנפרד.
- ב. חשבו את השדה החשמלי על ידי שימוש בחוק גאוס, הסבירו מדוע חוק גאוס ישים במקרה זה.

- ג. חשבו את השדה החשמלי במרחב עבור המקרה של  $N$  משטחים המחלקים את המרחב בזוויות שוות.
- למה תצטמצם תשובתכם עבור  $1 \ll N$ ? השתמשו ב-  $\sin \theta \approx \theta$ , כאשר  $1 \ll \theta$ .

- ד. כאשר  $N$  גדול מאוד, המערכת הופכת להיות מערכת עם צפיפות מטען נפחית התלויה במרחק מנקודת (או קו) החיתוך. מהי צפיפות המטען כתלות במרחק מנקודת (או קו) החיתוך  $\rho(r)$ ?

**(6) כדור עם חור**



- בתוך כדור הטעון בצפיפות מטען אחידה  $\rho$  קיים חלל כדורי בעל רדיוס  $a$ . המרחק של מרכז החלל ממרכז הכדור הוא  $d$ , רדיוס הכדור הגדול הוא  $R$ .
- א. מצאו את השדה בנקודה A.
- ב. מצאו את השדה בנקודה B.
- ג. מצאו את השדה החשמלי בתוך החלל (בכל נקודה).

**(7) שטף דרך קובייה**



נתון שדה במרחב:  $\vec{E} = -6x\hat{i} + (2-3y)\hat{j}$

- א. חשב את השטף העובר דרך צלעות קובייה הנמצאת ברביע הראשון כך שאחד מקדקודיה בראשית ואורך צלעה  $2m$ .  
 ב. מהו המטען הכלוא בתוך הקובייה?

**(8) מטען כלוא**

נתונה פונקציית השדה החשמלי

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 R^3}{\epsilon_0 (r^2 + R^2)} \hat{r}$$

כאשר  $R$ ,  $\rho_0$  קבועים נתונים, ו- $r$  הוא המרחק מהראשית בקואורדינטות כדוריות, מצא את כמות המטען הכלואה בתוך מעטפת כדורית בעלת רדיוס  $2R$ .



**(9) שטף דרך משטח ריבועי**



מצא את השטף העובר דרך משטח ריבועי (לא טעון) בעל צלע באורך  $a$  הנמצא בגובה  $\frac{a}{2}$  מעל מטען נקודתי  $q$ .

**(10) שטף דרך מעגל**



מטען  $q$  נמצא בראשית הצירים. מהו השטף החשמלי העובר דרך עיגול ברדיוס  $R$  המקביל למישור  $x-y$  ומרכזו נמצא

בנקודה  $(0, 0, \frac{R}{\sqrt{8}})$ ?

**(11) מישור עבה צמוד למישור דק**



מישור אינסופי דק בעל צפיפות מטען אחידה  $\sigma$  נמצא על מישור  $x-y$ . מישור אינסופי נוסף בעל עובי  $d$  טעון בצפיפות מטען אחידה  $\rho$ , מונח מעל

המישור הדק (תחתית המישור העבה נמצא גם על מישור  $x-y$ ). מצא את השדה החשמלי בכל המרחב.

**12) ארבעה לוחות**

במערכת הבאה ישנם ארבעה לוחות טעונים

$$\text{בצפיפויות מטען } \sigma_1 = 0.05 \frac{\text{C}}{\text{m}^2}, \sigma_2 = 0.02 \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$

המרחקים בין הלוחות הם:  $a = 3 \text{ c.m}$ ,  $b = 1 \text{ c.m}$   
 כפי שמצוין בציור וניתן להניח כי מרחקים אלו קטנים בהרבה מצלעות הלוחות.

- מצא את השדה החשמלי בכל מקום במרחב (בין הלוחות ומעליהן, אין צורך להתייחס למה שקורה בצידי הלוחות).
- משחררים פרוטון ממנוחה מהלוח  $-\sigma_2$ . כמה אנרגיה קינטית "ירוויח" מן המערכת? (הנח שהפרוטון עובר דרך הלוחות ללא הפרעה).
- מצא את מהירות הפרוטון ביציאה מן המערכת.

**13) מלוח אל לוח**

שני לוחות ריבועיים נמצאים אחד מעל השני. אורך הצלע של כל לוח היא 6 ס"מ והמרחק בין הלוחות הוא 2 מ"מ. הלוחות טעונים בצפיפות מטען אחידה. המטען הכולל על הלוח התחתון הוא:  $Q = 6 \cdot 10^{-6} \text{ C}$  והמטען הכולל על הלוח העליון זהה בגודלו והפוך בסימנו. משחררים אלקטרון ממנוחה קרוב מאוד ומתחת ללוח העליון:  $(q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}, m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg})$ .

- כמה זמן ייקח לאלקטרון להגיע אל הלוח התחתון?
- מהי מהירותו בזמן פגיעתו בלוח?
- מהי האנרגיה הקינטית של האלקטרון ברגע הפגיעה?

**14) קליפה כדורית עבה עם צפיפות משתנה**

קליפה כדורית עבה שרדיוסיה הפנימי והחיצוני הם  $a$  ו- $b$  נושאת מטען

בצפיפות נפחית לא אחידה,  $\rho(r) = \frac{\alpha}{r}$ , כאשר  $\alpha > 0$  הינו קבוע מספרי.

במרכזו של החלל הכדורי ( $r = 0$ ) מצוי מטען נקודתי  $+q$ .

מה צריך להיות ערכו של הקבוע המספרי  $\alpha$  על מנת שהשדה בתחום  $a < r < b$  יהיה קבוע, כלומר בלתי תלוי במרחק.



## תשובות סופיות:

$$\vec{E} = (\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2) \frac{1}{\epsilon_0 r} \hat{r} \quad (1)$$

$$\vec{E} = \frac{C(b-a)}{\epsilon_0 r} \hat{r} \quad (2)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} + 0 + \left( -\frac{kq_1}{d^2} \hat{z} \right) \quad \text{ב.} \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} + \frac{kq_2 \hat{z}}{d^2} + 0 \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} - \frac{kq_2}{4} \hat{z} - \frac{kq_1}{4} \hat{z} \quad \text{ג.}$$

$$\vec{E}_T = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} ((1 + \cos \alpha) + \sin \alpha \hat{y}) \quad \text{בין המישורים:} \quad (4)$$

$$\vec{E}_T = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} ((1 + \cos \alpha) - \sin \alpha \hat{y}) \quad \text{מעל המישורים:}$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{א.} \quad (5)$$

ב. חוק גאוס ישים מכיוון שניתן למצא מעטפת גאוס שהרכיב המאונך

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)} \approx \frac{\sigma N}{2\pi\epsilon_0} \quad \text{ג. של השדה על המעטפת אחיד.}$$

$$\rho(r) = \frac{\sigma N}{2\pi r} \quad \text{ד.}$$

$$\frac{4\pi k \rho d}{3} \hat{x} \quad \text{ג.} \quad \frac{4\pi k \rho}{3} \left( \frac{a^3}{(d+R)^2} - R \right) \hat{x} \quad \text{ב.} \quad \frac{4\pi k \rho a^3}{3d^2} \hat{x} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \quad \text{ב.} \quad -24 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\frac{16}{5} \pi \rho_0 R^3 \quad (8)$$

$$\frac{q}{6\epsilon_0} \quad (9)$$

$$\phi = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{kqa}{2 \left( x^2 + y^2 + \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} dx dy \quad (10)$$

$$\frac{q}{3\epsilon_0} \quad (11)$$

$$v = 1.04 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ג.} \quad 2.53 \cdot 10^{-11} \text{ J} \quad \text{ב.} \quad \bar{E} = -5.65 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{C}} \hat{y} \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$V(t) = 3.65 \cdot 10^9 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ב.} \quad t \approx 1.1 \cdot 10^{-12} \text{ sec} \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$E_k = 6.06 \cdot 10^{-12} \text{ J} \quad \text{ג.}$$

$$\alpha = \frac{q}{2\pi a^2} \quad (14)$$