חשמל ומגנטיות

פרק 4 - חוק גאוס

תוכן העניינים

הסברים בסיסיים:

רקע:

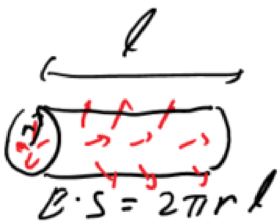
חוק גאוס:

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{in}$$

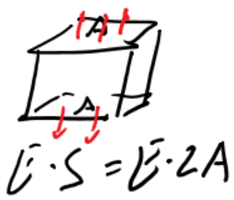
$$Q_{in} = \int \rho \, \mathrm{d}V$$

$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$ נקרא השטף של השדה החשמלי ומסומן ב ϕ_E

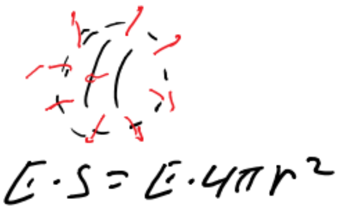
המקרים של חוק גאוס:



1. תיל / גליל / מעטפת גלילית אינסופיים.
במקרים האלו נבנה מעטפת גלילית והשטף
יהיה $E2\pi rl$, כאשר l ו- r הם אורך ורדיוס המעטפת.



2. מישור אינסופי.
במקרים האלו נבנה מעטפת בצורת קובייה והשטף
יהיה $E2A$, כאשר A זה שטח הפאות המקבילות למשטח.



3. כדור / קליפה כדורית.
במקרים האלו נבנה מעטפת כדורית והשטף
יהיה $E4\pi r^2$, כאשר r זה רדיוס המעטפת.

שדה של תיל אינסופי:

$$\vec{E} = \frac{\lambda \hat{r}}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

λ צפיפות מטען ליחידת אורך של התיל.

שדה של מישור אינסופי (דק):

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

σ צפיפות מטען ליחידת שטח של הלוח.

שדה מחוץ לכדור / קליפה כדורית:

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

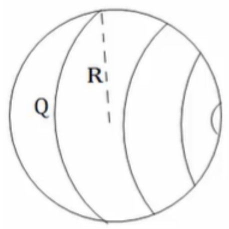
כמו מטען נקודתי.

חוק דאוס הדיפרנציאלי:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

שאלות:

1) שדה של קליפה כדורית

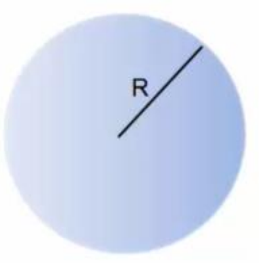


נתונה קליפה כדורית בעלת רדיוס R.
מצאו את השדה בכל המרחב.

2) שדה של כדור

נתון כדור בעל רדיוס R וצפיפות מטען פחית אחידה ρ.
מצאו את השדה בכל המרחב.

3) שדה של כדור עם צפיפות לא אחידה

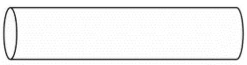


נתון כדור בעל רדיוס R וצפיפות התלויה במרחק ממרכז הכדור. r קבוע ונתון: $\rho(r)=\rho_0\frac{r}{R}$.
מצאו את התפלגות השדה במרחב (בתוך ומחוץ לכדור).

4) שדה של תיל אינסופי

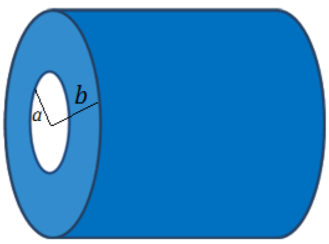
נתון תיל אינסופי בעל צפיפות λ.
מצאו את השדה במרחב.

5) שדה של גליל אינסופי



נתון גליל אינסופי בעל צפיפות מטען ליחידת נפח ρ ורדיוס ב-R.
מצאו את השדה במרחב.

6) קליפה גלילית עבה



קליפה גלילית עבה בעלת רדיוס פנימי a,
רדיוס חיצוני b וגובה H טעונה בצפיפות מטען
נפחית $\rho(r)=\frac{c}{r}$, כאשר c קבוע נתון ו-r הוא
המרחק מציר הסימטריה של הקליפה.
א. מצא את המטען הכולל בקליפה.
ב. מצא את השדה בכל המרחב אם: $H>>a\,,\ b$.

7) שדה של לוח אינסופי

נתון משטח אינסופי בעל צפיפות מטען ליחידת שטח σ.
מצאו את השדה במרחב.

8) לוח עם עובי

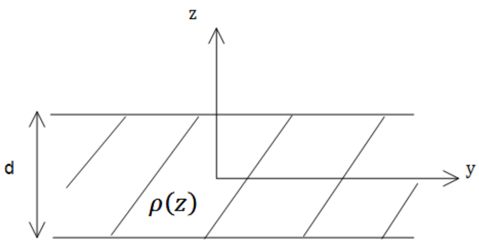
נתון מישור בעל שטח A ועובי d.
המישור טעון בצפיפות מטען קבועה
ליחידת נפח ρ.

א. מצאו את השדה רחוק מאוד מהמישור.

ב. מצאו את השדה קרוב מאוד למישור ובתוכו (השתמש בקירובים).

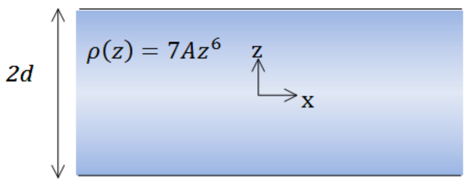
ג. מניחים אלקטרון בגובה $Z_0 < \frac{d}{2}$, מצאו את מיקום האלקטרון כפונקציה של הזמן בהנחה שצפיפות המטען במישור חיובית.

9) מישור עבה עם צפיפות אנטי סימטרית



מישור אינסופי בעל עובי d טעון בצפיפות מטען
כתלות במרחק ממרכז המישור $\rho(z) = Az$,
A קבוע נתון.
מצאו את השדה החשמלי בכל המרחב
שיוצר המטען במישור.

10) מישור עבה עם צפיפות משתנה



מישור אינסופי בעובי 2d טעון בצפיפות מטען
משתנה $\rho(z) = 7Az^6$, כאשר A קבוע נתון.
ציר ה-z אנך למישור וראשיתו במרכז המישור
(המישור אינסופי ב-y, x, ראה ציור).

א. מצאו את השדה החשמלי בכל המרחב.

ב. הראו שחוק גאוס הדיפרנציאלי מתקיים בכל המרחב.

ג. מצאו את הרוטור של השדה החשמלי $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ בכל המרחב, והסבר את התוצאה.

תשובות סופיות:

1) $\vec{E}=\begin{cases}0 & r<R\\ \dfrac{KQ}{r^2}\hat{r} & R<r\end{cases}$

2) $E=\begin{cases}\dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} & r<R\\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & R<r\end{cases}$

3) $E=\begin{cases}\dfrac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0 R} & r<R\\ \dfrac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0 r^2} & r>R\end{cases}$

4) $\vec{E}=\dfrac{2k\lambda}{r}\hat{r}$

5) $\vec{E}=\dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r}$

6) $\vec{E}=\dfrac{c(b\text{-}a)}{\varepsilon_0 r}\hat{r}$

7) $\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z>0\\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z<0\end{cases}$

8) א. $\vec{E}=\dfrac{kpdA}{r^2}\hat{r}$ ב. $\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z>\dfrac{d}{2}\\ -\dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z<-\dfrac{d}{2}\end{cases}$ ג. $z(t)=A\cos\left(\sqrt{\dfrac{|e|\rho}{\varepsilon_0 m}}t\right)$

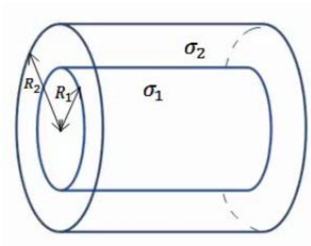
9) $\vec{E}=-\dfrac{A}{\varepsilon_0 z}\left[\left(\dfrac{d}{2}\right)^2-z^2\right]\hat{z}$

10) א. $\vec{E}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}A\cdot z^7\hat{z}$ ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

תרגול נוסף:

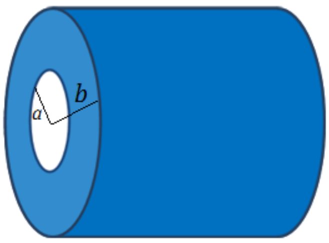
שאלות:

1) שתי קליפות גליליות חלולות



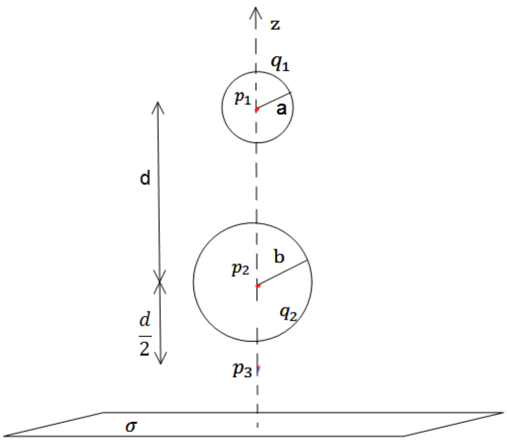
נתונות שתי קליפות (חלולות) גליליות אינסופיות
בעלות ציר סימטריה משותף.
רדיוס הקליפה הפנימית הוא R_1
וצפיפות המטען המשטחית בה היא σ_1.
רדיוס הקליפה החיצונית הוא R_2 וצפיפות המטען בה היא σ_2.
מצא את השדה החשמלי בכל המרחב.

2) קליפה גלילית עבה



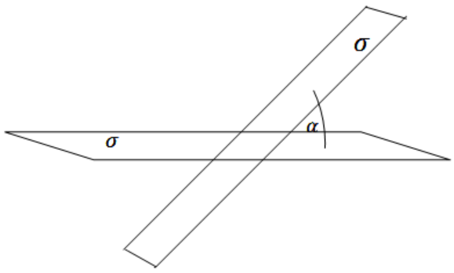
קליפה גלילית עבה בעלת רדיוס פנימי a,
רדיוס חיצוני b וגובה H טעונה בצפיפות מטען
נפחית $\rho(r)=\frac{c}{r}$, כאשר c קבוע נתון ו-r הוא
המרחק מציר הסימטריה של הקליפה.
א. מצא את המטען הכולל בקליפה.
ב. מצא את השדה בכל המרחב אם : $H>>a\ ,\ b$.

3) משטח ושתי קליפות כדוריות



שתי קליפות כדוריות בעלות רדיוסים
שונים $a<b$, נמצאות במרחק $d>2b$
אחת מעל השנייה.
הקליפות טעונות במטענים $q_1\ ,\ q_2$ בהתאמה.
במאונך לציר המחבר בין הקליפות ומתחת
לקליפה התחתונה (עם רדיוס b) מונח מישור
אינסופי הטעון בצפיפות מטען ליחידת שטח σ.
מצא את השדה בנקודות הבאות.
א. p_1 הנמצאת במרכז הקליפה בעלת רדיוס a.
ב. p_2 הנמצאת במרכז הקליפה בעלת רדיוס b.
ג. p_3 הנמצאת במרחק $\frac{d}{2}$ מתחת למרכז הקליפה התחתונה אך מעל המישור.

4) שני מישורים בזווית

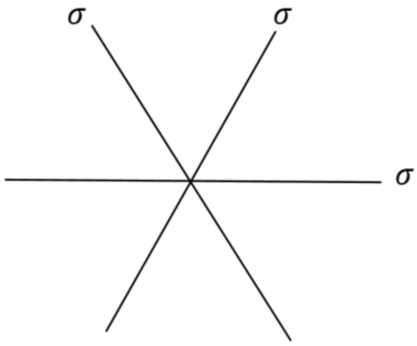


שני מישורים אינסופיים טעונים בצפיפות מטען ליחידת שטח σ. המישורים נמצאים בזווית α אחד מהשני.

א. מצא את השדה החשמלי בין המישורים ומעל המישור האופקי.

ב. מצא את השדה מעל שני המישורים.

5) שלושה לוחות בזווית



באיור מתוארת מערכת של שלושה לוחות אינסופיים (אינסופיים פנימה והחוצה מהדף) בעלי צפיפות מטען משטחית זהה σ .

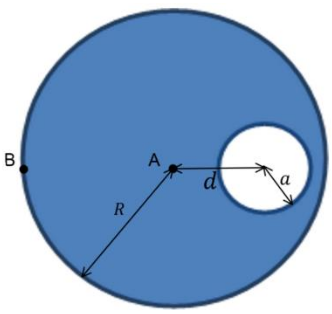
א. חשבו את השדה בכל נקודה במרחב על ידי סופרפוזיציה של השדות של כל לוח בנפרד.

ב. חשבו את השדה החשמלי על ידי שימוש בחוק גאוס, הסבירו מדוע חוק גאוס ישים במקרה זה.

ג. חשבו את השדה החשמלי במרחב עבור המקרה של N משטחים המחלקים את המרחב בזוויות שוות.
למה תצטמצם תשובתכם עבור $N \gg 1$?
השתמשו ב- $\sin\theta \approx \theta$, כאשר $\theta \ll 1$.

ד. כאשר N גדול מאוד, המערכת הופכת להיות מערכת עם צפיפות מטען נפחית התלויה במרחק מנקודה (או קו החיתוך).
מהי צפיפות המטען כתלות במרחק מנקודה (או קו החיתוך) $\rho(r)$?

6) כדור עם חור



בתוך כדור הטעון בצפיפות מטען אחידה ρ קיים חלל כדורי בעל רדיוס a. המרחק של מרכז החלל ממרכז הכדור הוא d , רדיוס הכדור הגדול הוא R

א. מצאו את השדה בנקודה A .

ב. מצאו את השדה בנקודה B .

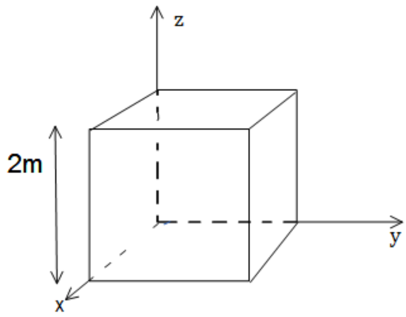
ג*. מצאו את השדה החשמלי בתוך החלל (בכל נקודה).

7) שטף דרך קובייה

נתון שדה במרחב : $\vec{E} = -6\hat{x} + (2-3y)\hat{y}$.

א. חשב את השטף העובר דרך צלעות קובייה הנמצאת ברביע הראשון כך שאחד מקדקודיה בראשית ואורך צלעה 2m .

ב. מהו המטען הכלוא בתוך הקובייה?



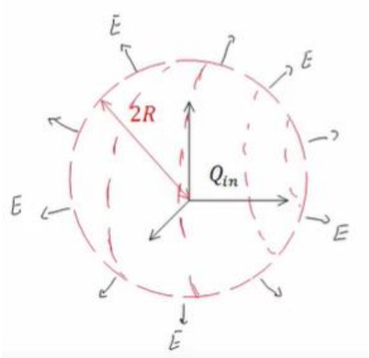
8) מטען כלוא

נתונה פונקציית השדה החשמלי

במרחב : $\vec{E} = \frac{\rho_0 R^3}{\varepsilon_0(r^2+R^2)}\hat{r}$.

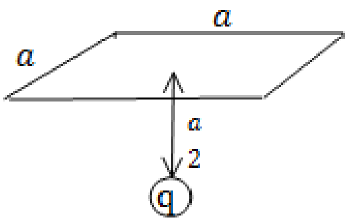
כאשר R , ρ_0 קבועים נתונים, ו-r הוא המרחק מהראשית בקואורדינטות כדוריות,

מצא את כמות המטען הכלואה בתוך מעטפת כדורית בעלת רדיוס 2R.



9) שטף דרך משטח ריבועי

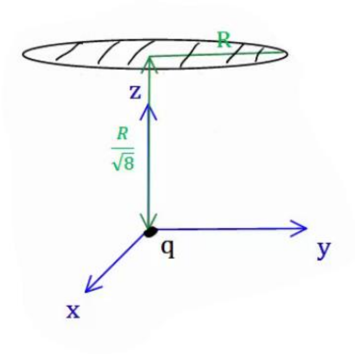
מצא את השטף העובר דרך משטח ריבועי (לא טעון) בעל צלע באורך a הנמצא בגובה $\frac{a}{2}$ מעל מטען נקודתי q.



10) שטף דרך מעגל

מטען q נמצא בראשית הצירים.

מהו השטף החשמלי העובר דרך עיגול ברדיוס R המקביל למישור *x-y* ומרכזו נמצא בנקודה $\left(0,0,\frac{R}{\sqrt{8}}\right)$?

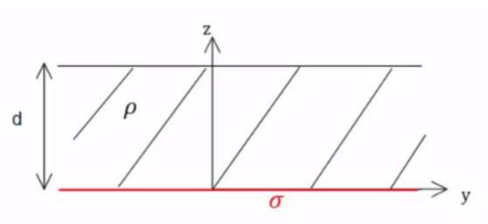


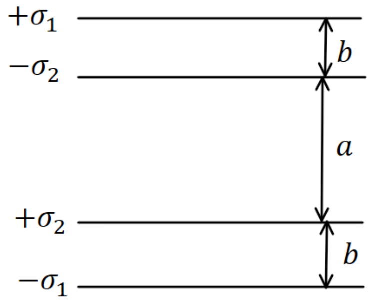
11) מישור עבה צמוד למישור דק

מישור אינסופי דק בעל צפיפות מטען אחידה σ נמצא על מישור *x-y*.

מישור אינסופי נוסף בעל עובי d טעון בצפיפות מטען אחידה ρ , מונח מעל המישור הדק (תחתית המישור העבה נמצא גם על מישור *x-y*).

מצא את השדה החשמלי בכל המרחב.





12) ארבעה לוחות

במערכת הבאה ישנם ארבעה לוחות הטעונים בצפיפויות מטען $\sigma_1 = 0.05\ \frac{c}{m^2}$, $\sigma_2 = 0.02\ \frac{c}{m^2}$.

המרחקים בין הלוחות הם: $a = 3\ c.m\ ,\ b = 1\ c.m$ כפי שמצוין בציור וניתן להניח כי מרחקים אלו קטנים בהרבה מצלעות הלוחות.

א. מצא את השדה החשמלי בכל מקום במרחב (בין הלוחות ומעליהן, אין צורך להתייחס למה שקורה בצידי הלוחות).

ב. משחררים פרוטון ממנוחה מהלוח $-\sigma_2$. כמה אנרגיה קינטית "ירוויח" מן המערכת? (הנח שהפרוטון עובר דרך הלוחות ללא הפרעה).

ג. מצא את מהירות הפרוטון ביציאה מן המערכת.

13) מלוח אל לוח

שני לוחות ריבועיים נמצאים אחד מעל השני. אורך הצלע של כל לוח היא 6 ס"מ והמרחק בין הלוחות הוא 2 מ"מ. הלוחות טעונים בצפיפות מטען אחידה.

המטען הכולל על הלוח התחתון הוא: $Q = 6 \cdot 10^{-6} c$ והמטען הכולל על הלוח העליון זהה בגודלו והפוך בסימנו. משחררים אלקטרון ממנוחה קרוב מאוד ומתחת ללוח העליון: $\left(q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} c\ ,\ m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} kg\right)$.

א. כמה זמן ייקח לאלקטרון להגיע אל הלוח התחתון?

ב. מהי מהירותו בזמן פגיעתו בלוח?

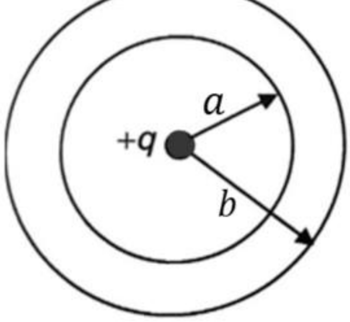
ג. מהי האנרגיה הקינטית של האלקטרון ברגע הפגיעה?

14) קליפה כדורית עבה עם צפיפות משתנה

קליפה כדורית עבה שרדיוסיה הפנימי והחיצוני הם a ו- b נושאת מטען בצפיפות נפחית לא אחידה, $\rho(r) = \frac{\alpha}{r}$, כאשר $\alpha > 0$ הינו קבוע מספרי.

במרכזו של החלל הכדורי $(r = 0)$ מצוי מטען נקודתי $+q$.

מה צריך להיות ערכו של הקבוע המספרי α על מנת שהשדה בתחום $a < r < b$ יהיה קבוע, כלומר בלתי תלוי במרחק.



תשובות סופיות:

1) $\vec{E}=(\sigma_1 R_1+\sigma_2 R_2)\frac{1}{\varepsilon_0 r}\hat{r}$

2) $\vec{E}=\frac{C(b\text{-}a)}{\varepsilon_0 r}\hat{r}$

3) א. $\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}+\frac{kq_2\hat{z}}{d^2}+0$ ב. $\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}+0+\left(-\frac{kq_1}{d^2}\hat{z}\right)$

ג. $\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}-\frac{kq_2}{\frac{d^2}{4}}\hat{z}-\frac{kq_1}{\frac{9d^2}{4}}\hat{z}$

4) בין המישורים: $\vec{E}_T=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left((1+\cos\alpha)+\sin\alpha\hat{y}\right)$

מעל המישורים: $\vec{E}_T=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left((1+\cos\alpha)-\sin\alpha\hat{y}\right)$

5) א. $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

ב. $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, חוק גאוס ישים מכיוון שניתן למצא מעטפת גאוס שהרכיב המאונך של השדה על המעטפת אחיד. ג. $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)}\approx\frac{\sigma N}{2\pi\varepsilon_0}$

ד. $\rho(r)=\frac{\sigma N}{2\pi r}$.

6) א. $\frac{4\pi k\rho a^3}{3d^2}\hat{x}$ ב. $\frac{4\pi k\rho}{3}\left(\frac{a^3}{(d+R)^2}-R\right)\hat{x}$ ג. $\frac{4\pi k\rho d}{3}\hat{x}$

7) א. -24 ב. $\frac{Qin}{\varepsilon_0}$

8) $\frac{16}{5}\pi\rho_0 R^3$

9) $\frac{q}{6\varepsilon_0}$

10) $\phi=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{kqa}{2\left(x^2+y^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdy$

(11 $\frac{q}{3\varepsilon_0}$

(12 א. $\vec{E} = -5.65 \cdot 10^{q} \frac{N}{C} \hat{y}$ ב. $2.53 \cdot 10^{-11} J$ ג. $v = 1.04 \cdot 10^{8} \frac{m}{sec}$

(13 א. $t \approx 1.1 \cdot 10^{-12} \sec$ ב. $V(t) = 3.65 \cdot 10^{9} \frac{m}{sec}$

ג. $E_k = 6.06 \cdot 10^{-12} J$

(14 $\alpha = \frac{q}{2\pi a^2}$