שיטות כמותיות בניהול

פרק 4 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות 1
2. חוקי הלוגריתמים 3
3. הלוגריתם הטבעי 5
4. משוואות עם בסיסים שונים 7
5. אי-שוויונים לוגריתמים 8

הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות

סיכום כללי

הגדרה

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, כאשר: $a \neq 1$, $b > 0$, a.

הסבר

לוגריתם על בסיס a של b מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את a,
על מנת שיהיה שווה ל- b. ערך חזקה זו הוא x.
ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס.
נחשב ערכי לוגריתמים ונפתור משוואות לוגריתמיות על ידי מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

כללים יסודיים בלוגריתמים

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$, לכל $a > 0$, $a \neq 1$.

שאלות

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$

3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_6(4x-2)=1$ ב. $\log_8(x^4-73)=1$

ג. $\log_3\frac{x+3}{3-3x}=-2$

4) פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה: $\log_4(\log_3 x)=1$.
(שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים)

5) פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה: $\log_2(3^x+37)=6$.
(מתקבלת משוואה מעריכית)

6) פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה (הצבה): $(\log_2 x)^4=10000$.

תשובות סופיות

1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2
ו. 4 ז. -1.5

2) א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=65,536$ ג. $x=27$ ד. $x=4$
ה. $x=5$ ו. $x=4$

3) א. $x=2$ ב. $x=\pm3$ ג. $x=-2$

4) $x=81$

5) $x=3$

6) $x=1024,\ \frac{1}{1024}$

חוקי הלוגריתמים:

סיכום כללי:

להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a>0\neq 1$ וארגומנטים x ו- y חיוביים:

- מכפלה לסכום: $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$.
- מנה להפרש: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$.
- מקדם למעריך: $\log_a b^n=n\log_a b$ (כאשר $b>0$ ו- n מספר ממשי כלשהו).

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\log_3 12+\log_3 2.25$

ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40+\log_{\frac{1}{5}} 12.5+\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{4}$

ג. $\log_2 200-\log_2 100$

2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$

ב. $\frac{\log_9 62.5+\log_9 2}{\log_9 0.2}$

משוואות לוגריתמיות:

3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_2 x+\log_2(x-6)=4$

ב. $\log_3 x+\log_3(x+2)=1$

4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א. $\log_5(4x-3)=\log_5 7$.

ב. $2\log_2(2x-2)-\log_2(16-x)=\log_2(x-1)+1$.

5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_3\left(3\cdot 5^x+39\right)=3+\log_3\left(5^x-3\right)$.

תשובות סופיות:

1) א. 3 ב. -3 ג. 1

2) א. $\frac{4}{3}$ ב. -3

3) א. $x=8$ ב. $x=3,\frac{1}{27}$

4) א. $x=2.5$ ב. $x=6$.

5) $x=1$

הלוגריתם הטבעי

סיכום כללי

לוגריתם על בסיס e (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ ונקרא הלוגריתם הטבעי.

למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln\frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן.

מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \rightarrow e^b = a$, כאשר $a > 0$ ו- b מספרים.

שאלות

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

א. $\ln e^2$ ב. $\ln\frac{1}{e^4}$ ג. $\ln\frac{1}{e\sqrt{e}}$

2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\ln x = 2$ ב. $\ln x = -\frac{1}{2}$

3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

א. $\ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x$

ב. $3\ln^2 x + \ln x = 2$

ג. $\ln\left(e^2x^3\right) \cdot \ln\frac{1}{x} = \ln\left(ex^2\right)$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

א. $x^{\ln x} = e^6 x$ ב. $\left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$

5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $e^{\ln 3}$ ב. $e^{2\ln 3}$

תשובות סופיות

1) א. 2 ב. -4 ג. -1.5

2) א. $x=e^2$ ב. $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$

3) א. $x=0$ ב. $x=\sqrt[3]{e^2},\frac{1}{e}$ ג. $x=\frac{1}{\sqrt[3]{e}},\frac{1}{e}$

4) א. $x=e^3,\frac{1}{e^2}$ ב. $x=\sqrt{e},e$

5) א. 3 ב. 9

משוואות עם בסיסים שונים:

סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$.
במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x = \log_3 4$.
את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע״י מחשבון או ע״י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x = 6$ ב. $2^x - 9 = 0$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי): $e^{3x} = 3$

תשובות סופיות:

1) א. $x = \log_3 6 = 1.63$ ב. $x = \log_2 9 = 3.17$

2) $x = \frac{1}{3}\ln 3 = 0.36$

אי-שוויונים לוגריתמים

סיכום כללי

פתרון אי-השוויון $\log_a x > \log_a y$, הוא $x > y$, עבור $a > 1$, ו-$x < y$ עבור $0 < a < 1$.

שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\log_2 x < \log_2 (5x - 20)$

2) $\ln x \ge \ln\left(x^2 - 12\right)$

3) $\ln x < 3$

4) $\ln^2 x - 6\ln x < 7$

5) $\dfrac{6}{\ln^2 x} \ge 2 - \dfrac{1}{\ln x}$

תשובות סופיות

1) $x > 5$

2) $2\sqrt{3} < x \le 4$

3) $0 < x < e^3$

4) $\dfrac{1}{e} < x < e^7$

5) $\dfrac{1}{\sqrt{e^3}} \le x \le e^2$ וגם $x \ne 1$