

# מתמטיקה לחשבונאים א

פרק 4 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

1. אי-שוויונים לוגריתמים..... 1
2. הגדרת הלוגריתם ..... (ללא ספר) 2
3. הוצאת לוג משני אגפי המשוואה ..... (ללא ספר) 3
4. חוקי הלוגריתמים ישן ..... (ללא ספר) 4
5. מערכת משוואות לוגריתמיות..... 2
6. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות..... 3
7. משוואות לוגריתמיות הנפתרות באמצעות הגדרת הלוג ..... (ללא ספר) 3
8. משוואות לוגריתמיות הנפתרות באמצעות חוקי הלוגריתמים ..... (ללא ספר) 3
9. משוואות לוגריתמיות עם בסיסים שונים ..... (ללא ספר) 3
10. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות..... 4
11. חוקי הלוגריתמים..... 7
12. חישובים עם חזקה לוגריתמית..... 11
13. מעבר בין בסיסים..... 12
14. הלוגריתם הטבעי..... 14
15. משוואות עם בסיסים שונים..... 16
16. משוואות לוגריתמיות מסכמות..... 17
17. אי-שוויונים לוגריתמים עם משתנה בבסיס ..... (ללא ספר) 17

## אי-שוויונים לוגריתמיים:

### סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון:  $\log_a x > \log_a y$  הוא:  $x > y$  עבור:  $a > 1$  ו-  $x < y$  עבור:  $0 < a < 1$ .

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\log_6(x^2 - 5x) < 1$ (2)	$\log_2 x < \log_2(5x - 20)$ (1)
$\log_{\frac{1}{2}}(1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(7 - x)$ (4)	$\log_3 x > \log_9(15 - 2x)$ (3)
$\ln x < 3$ (6)	$\ln x \geq \ln(x^2 - 12)$ (5)
$\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$ (8)	$\ln^2 x - 6 \ln x < 7$ (7)

### תשובות סופיות:

$-1 < x < 0, 5 < x < 6$ (2)	$x > 5$ (1)
$-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (4)	$3 < x < 7\frac{1}{2}$ (3)
$0 < x < e^3$ (6)	$2\sqrt{3} < x \leq 4$ (5)
וגם $x \neq 1$ וגם $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ (8)	$\frac{1}{e} < x < e^7$ (7)

## מערכת משוואות לוגריתמיות:

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6(2y-2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y-1 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3(4x+y) - 2 \\ \log_5(5x+3y) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y)) = 1 \\ \log_5(x+y-11) = \log_{25} x + \frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 6\log_4 y = 11 \\ 10\log_5 x - 2\log_4 y = 17 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1(2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases} \quad (9)$$

### תשובות סופיות:

$$(8, -5) \quad (3) \qquad (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) \quad (2) \qquad (8, 3) \quad (1)$$

$$\left(16, \frac{1}{3}\right) \quad (6) \qquad (25, 8) \quad (5) \qquad (16, 7) \quad (4)$$

$$(4, 7) \quad (9) \qquad (3, 9), (9, 3) \quad (8) \qquad (25, 4), (625, 2) \quad (7)$$

## מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y = \log_2(4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3(9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} 3y + 5 \log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \log_4(5 - 9^y) \\ \log_2(2^x + 3) = \log_4(29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2(y + 1) \end{cases} \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$(36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) \quad (3) \quad (3, 3) \quad (2) \quad (1, 1) \quad (1)$$

$$(1, 0) \quad (6) \quad (1, 1), (2, 3) \quad (5) \quad \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \quad (4)$$

## הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא:  $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$  כאשר:  $a, b > 0, a \neq 1$ .

#### הסבר:

לוגריתם על בסיס  $a$  של  $b$  מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את  $a$  על מנת שיהיה שווה ל- $b$ .  
 ערך חזקה זו הוא  $x$ . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים  
 ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

### כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי:  $\log_a a = 1$  וכן:  $\log_a 1 = 0$  לכל  $a > 0, a \neq 1$ .

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א.  $\log_2 32$       ב.  $\log 1000$       ג.  $\log_{25} 5$

ד.  $\log_8 4$       ה.  $\log_4 \frac{1}{16}$       ו.  $\log_a a^4$

ז.  $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א.  $\log_{36} 6 = x$       ב.  $\log_2 x = 16$

ג.  $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$       ד.  $\log_x 64 = 3$

ה.  $\log_x 25 = 2$       ו.  $\log_x (3x+4) = 2$

3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

$$\log_4(4-x) = \frac{1}{2} \quad \text{ב.} \qquad \log_6(4x-2) = 1 \quad \text{א.}$$

$$\log_3 \frac{x+3}{3-3x} = -2 \quad \text{ד.} \qquad \log_8(x^4 - 73) = 1 \quad \text{ג.}$$

$$\log_{\sqrt{x+1}}(2x^2 - 5) = 2 \quad \text{ו.} \qquad \log_x(2x^2 + x - 12) = 2 \quad \text{ה.}$$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

$$3\log_{27}(\log_2(x+3)) = 1 \quad \text{ב.} \qquad \log_4(\log_3 x) = 1 \quad \text{א.}$$

$$\log_6\left(3 + \log_2\left(6 + \log_4(x^2 + 15)\right)\right) = 1 \quad \text{ד.} \qquad \log_{\frac{1}{16}}\left(\log_3(5x^2 + 1)\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{ג.}$$

5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\log_3(3 \cdot 2^x - 303) = 4 \quad \text{ב.} \qquad \log_2(3^x + 37) = 6 \quad \text{א.}$$

$$3\log_2\left(3 \cdot 4^{1+\frac{1}{3}x} - 11 \cdot 2^{\frac{x}{3}} + 3\right) = 12 + 2x \quad \text{ד.} \qquad \log_5(126 \cdot 5^x - 25) = 2x + 1 \quad \text{ג.}$$

6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

$$2(\log_3 x)^2 + \log_3 x = 10 \quad \text{ב.} \qquad (\log_2 x)^4 = 10000 \quad \text{א.}$$

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x} + \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x + 2} = 2 \quad \text{ד.} \qquad \frac{3 \cdot \log_{14} x + 1}{(\log_{14} x)^2} = 4 \quad \text{ג.}$$

## תשובות סופיות:

- (1) א. 5    ב. 3    ג.  $\frac{1}{2}$     ד.  $\frac{2}{3}$     ה. -2  
 ו. -1.5    ז. 4
- (2) א.  $x = \frac{1}{2}$     ב.  $x = 65,536$     ג.  $x = 27$     ד.  $x = 4$   
 ה.  $x = 5$     ו.  $x = 4$
- (3) א.  $x = 2$     ב.  $x = 2$     ג.  $x = \pm 3$     ד.  $x = -2$     ה.  $x = 3$     ו.  $x = 2$
- (4) א.  $x = 81$     ב.  $x = 5$     ג.  $x = \pm 4$     ד.  $x = \pm 1$
- (5) א.  $x = 3$     ב.  $x = 7$     ג.  $x = -1, 2$     ד.  $x = -6$
- (6) א.  $x = 1024, \frac{1}{1024}$     ב.  $x = 9, \frac{1}{9\sqrt{3}}$   
 ג.  $x = 14, \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$     ד.  $x = \frac{1}{3}$

## חוקי הלוגריתמים:

### סיכום כללי:

- להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס  $a > 0 \neq 1$  וארגומנטים  $x$  ו- $y$  חיוביים:
- מכפלה לסכום:  $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ .
  - מנה להפרש:  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ .
  - מקדם למעריך:  $\log_a b^n = n \log_a b$  (כאשר  $b > 0$  ו- $n$  מספר ממשי כלשהו).

### שאלות:

#### שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- |  |   |
|--|---|
| א. $\log_3 12 + \log_3 2.25$   | ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$ |
| ג. $\log_2 200 - \log_2 100$   | ד. $\log_3 60 - \log_3 540$   |
| ה. $\log_4 8 + \log_4 12 - \log_4 6$   | ו. $\log_7 1.5 - \log_7 147 + \log_7 2$   |
| ז. $3 \log_5 2 - \log_5 1.6$   | ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4 + 2 \log_{\sqrt{4}} \sqrt{10}$                                |
| ט. $\frac{1}{2} \left( \log_7 \frac{7}{2} + \log_7 2 \right) + \log_7 14 - \frac{1}{3} \log_7 8$ | י. $\frac{1}{4} \log 81 - \log 1.5 - \frac{1}{2} \log 40$                             |

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- |   |  |
|---|--|
| א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$                             | ב. $\frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2}$                                   |
| ג. $\frac{\log_3 5 - \log_3 2 + \log_3 50}{\log_3 225 - 2}$ | ד. $\frac{2 - 2 \log_3 4 + \log_3 8 \frac{8}{9}}{4 - \log_3 0.01 - 2 \log_3 18}$ |

## משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א.  $\log_2 x + \log_2 (x-6) = 4$       ב.  $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$

ג.  $\log_2 (x+30) - \log_2 x = 4$       ד.  $\log_5 (x+146) - \log_5 (x+2) = 2$

ה.  $2\log_3 (2x-1) - \log_3 (22x+9) = -1$

ו.  $2\log_5 (x-2) = \log_5 (4x-15) + \log_5 x$

(4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א.  $\log_5 (4x-3) = \log_5 7$

ב.  $2\log_2 (2x-2) - \log_2 (16-x) = \log_2 (x-1) + 1$

(5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א.  $\log_3 (3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3 (5^x - 3)$

ב.  $\log_2 (3 - 4^{x+1}) - \log_2 11 = x$

(6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א.  $\log_4 x \cdot \log_4 (16x) = 8$

ב.  $\log_2 \left(\frac{x}{4}\right) \cdot \log_2 (1024x) = -11$

ג.  $\log_2 x^2 \log_2 \left(\frac{x}{16}\right) = -\log_2 (64x)$

ד.  $(\log_4 4x)^2 = \log_4 4x^2 + 1$

ה.  $\log_3 (9x^2) \cdot \log_3 (9x^3) = \log_3 \left(\frac{81}{x}\right) + 2$

ו.  $\frac{\log_2 \left(\frac{x^3}{32}\right)}{(\log_2 x)^2} + \frac{\log_2 (2x)}{\log_2 x} = 1\frac{7}{9}$

**שאלות הבעה:**

(7) נתון:  $\log_3 2 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_3 16$       ב.  $\log_3 6$

ג.  $\log_3 24$       ד.  $\log_3 1.5$

(8) נתון:  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_2 5 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_2 45$       ב.  $\log_2 60$       ג.  $\log_2 \sqrt{7.5}$

(9) נתון:  $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$ .

הבע באמצעות  $a$  את  $\log_{18} 27$  ואת  $\log_{18} 16$ .

**שאלות נוספות:**

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

$$\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64 \quad (10)$$

$$2 \log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2 \quad (11)$$

$$\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2 \quad (12)$$

$$\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2 \quad (13)$$

## תשובות סופיות:

- (1) א. 3    ב. -3    ג. 1    ד. -2    ה. 2    ו. -0.5
- (2) א.  $\frac{4}{3}$     ב. -3    ג. 1.5    ד. 0.5
- (3) א.  $x=8$     ב.  $x=3, \frac{1}{27}$     ג.  $x=2$     ד.  $x=4$     ה.  $x=3$     ו.  $x=4$
- (4) א.  $x=2.5$     ב.  $x=6$
- (5) א.  $x=1$     ב.  $x=-2$
- (6) א.  $x=16, \frac{1}{256}$     ב.  $x=2, \frac{1}{512}$     ג.  $x=4, 2\sqrt{2}$     ד.  $x=4, \frac{1}{4}$     ה.  $x=\frac{1}{9}, \sqrt[9]{3}$     ו.  $x=8, \sqrt[7]{2^{15}}$
- (7) א.  $4a$     ב.  $a+1$     ג.  $3a+1$     ד.  $1-a$
- (8) א.  $2a+b$     ב.  $2+a+b$     ג.  $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$
- (9)  $4(2a-1), 3(1-a)$
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) הוכחה.

## חישובים עם חזקה לוגריתמית:

### סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא:  $a^{\log_a x} = x$  כאשר  $a > 0 \neq 1$ .

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א.  $6^{\log_6 8}$       ב.  $4^{\log_2 5}$

(2) נתונה התבנית:  $3 \cdot 4^x$ . חשב את ערכה עבור:

א.  $x = \log_4 7$       ב.  $x = \log_4 \sqrt{3}$

ג.  $x = 2 \log_4 0.1$       ד.  $x = \sqrt{\log_2 5}$

(3) נתונה התבנית:  $\frac{1}{6} \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x + 1$ . חשב את ערכה עבור:

א.  $x = -1$       ב.  $x = \log_3 5$

ג.  $x = \log_3 \sqrt{6}$

(4) חשב:

א.  $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{56}} 81}$       ב.  $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}} 5}}$

### תשובות סופיות:

(1) א. 8      ב. 25

(2) א. 21      ב.  $3\sqrt{3}$       ג. 0.03      ד. 15

(3) א.  $\frac{19}{54}$       ב.  $-4\frac{5}{6}$       ג.  $2-2\sqrt{6}$

(4) א.  $\frac{1}{81}$       ב.  $\frac{2}{\sqrt[2]{25}}$

## מעבר בין בסיסים:

### סיכום כללי:

מעבר מבסיס  $a$  לבסיס  $m$  (כאשר:  $a > 0 \neq 1$  ו-  $m > 0 \neq 1$ , וכן:  $b > 0$ )

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$$

יתבצע באופן הבא:

### שאלות:

#### שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_4 7 \cdot \log_7 4$

ג.  $\log_{\sqrt{3}} 5 \cdot \log_{\sqrt{125}} 9$

ב.  $\log_{0.1} 3 \cdot \log_9 1000$

ד.  $\log_4 169 \cdot \log_{25} 64 \cdot \log_{13} 625$

(2) הוכח את השוויונים הבאים:

א.  $\log_2 25 \cdot \log_5 3 \cdot \log_9 2 = 1$

ב.  $\log_{16} 9 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 5 = 1$

#### משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות:

א.  $\log_2 x + \log_{32} x = 6$

ג.  $\log_2 4x \cdot \log_8 \frac{x}{16} = -\frac{5}{3}$

ב.  $\log_3 x \cdot \log_{27} x = 3$

ד.  $\log_x 5 - 6 \log_{125} x = 1$

### שאלות הבעה:

(4) נתון:  $\log_4 6 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_2 3$       ב.  $\log_{32} 36$       ג.  $\log_{216} 96$

(5) נתון:  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_3 5 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו-  $b$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_3 50$       ב.  $\log_2 \sqrt{30}$       ג.  $\log_5 22.5$

6 נתון  $\log_3 7 = a$ ,  $\log 9 = 2b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את:

א.  $\log 21$ .

ב.  $\log_3 \left( \frac{10}{7} \right)$ .

ג.  $\log_7 10$ .

ד.  $\log_{30} 63$ .

**שאלות נוספות:**

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

7  $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$

8  $\log \sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log \sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$

**תשובות סופיות:**

1 א. 1      ב. -1.5      ג.  $2\frac{2}{3}$       ד. 12

2 א. שאלת הוכחה.      ב. שאלת הוכחה.

3 א.  $x = 32$       ב.  $x = 27, \frac{1}{27}$       ג.  $x = 8, \frac{1}{2}$       ד.  $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$

4 א.  $2a - 1$       ב.  $0.8a$       ג.  $\frac{a+2}{3a}$

5 א.  $2b + \frac{1}{a}$       ב.  $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$       ג.  $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$

6 א.  $b + ab$       ב.  $\frac{1}{b} - a$       ג.  $\frac{1}{ab}$       ד.  $\frac{ab+2b}{b+1}$

7 הוכחה.

8 הוכחה.

## הלוגריתם הטבעי:

### סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס  $e$  (קבוע אוילר) מסומן:  $\log_e \Rightarrow \ln$  והוא נקרא הלוגריתם הטבעי. למשל:  $\ln 3 = \log_e 3$  או  $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$ . לוג זה נקרא בשם לן. מהגדרת הלוגריתם מתקיים:  $\ln a = b \rightarrow e^b = a$  כאשר  $a > 0$  ו- $b$  מספרים כלשהם.

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\text{א. } \ln e^2 \quad \text{ב. } \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ג. } \ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \ln x = 2 \quad \text{ב. } \ln x = -\frac{1}{2}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{aligned} \text{א. } \ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x \\ \text{ב. } 3 \ln^2 x + \ln x = 2 \\ \text{ג. } \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2) \end{aligned}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

$$\text{א. } x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{ב. } \left(\frac{1}{x}\right)^{2-3 \ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$$

(5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$\text{א. } e^{\ln 3} \quad \text{ב. } e^{2 \ln 3}$$

## תשובות סופיות:

(1) א. 2      ב. -4      ג. -1.5

(2) א.  $x = e^2$       ב.  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

(3) א.  $x = 0$       ב.  $x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e}$       ג.  $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$

(4) א.  $x = e^3, \frac{1}{e^2}$       ב.  $x = \sqrt{e}, e$

(5) א. 3      ב. 9

## משוואות עם בסיסים שונים:

### סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון:  $3^x = 4$ . במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך:  $x = \log_3 4$ . את ערך הביטוי  $\log_3 4$  ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10:  $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א.  $3^x = 6$       ב.  $2^x - 9 = 0$

ג.  $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$       ד.  $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א.  $e^{3x} = 3$       ב.  $4 + 3e^x = 9$

ג.  $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$       ד.  $e(e^x + 1) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א.  $\log_2(7 - 5^x) = \log_2 \frac{10}{5^x}$       ב.  $\log_2(4e^{2x} + 6) - 1 = \log_2(7e^x)$

### תשובות סופיות:

(1) א.  $x = \log_3 6 = 1.63$       ב.  $x = \log_2 9 = 3.17$

ג.  $x = \log_7 3 = 0.564$ ,  $x = \log_7 5 = 0.827$       ד. אין פתרון.

(2) א.  $x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36$       ב.  $x = \ln \frac{5}{3} = 0.51$       ג.  $x = 0$ ,  $x = -\ln 3 = -1.09$

ד.  $x = \ln 16 = 2.7725$

(3) א.  $x = 1$ ,  $x = \log_5 2 = 0.43$       ב.  $x_1 = \ln \frac{1}{2} = -0.693$ ,  $x = \ln 3 = 1.098$

## משוואות לוגריתמיות מסכמות:

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{aligned}
 (2\log_x \sqrt{2})^2 &= 4\log_x(2\sqrt{2}) - 5 & \text{(2)} & \quad 6\sqrt{\log_5 \sqrt[4]{x}} - \log_5 x = 2 & \text{(1)} \\
 \log_4(\log x^2) + \log_4(\log x - 4) &= \log_4 10 & \text{(4)} & \quad \log_7(10^{\log(x^2+10)}) - 1 = 2\log_7 \sqrt{x} & \text{(3)} \\
 \log_x(x^2 + 4) - \log_{0.5} 0.5 &= \log_{x^2} 16 & \text{(6)} & \quad 4\log_{2x} 4 = (1 + \log_2 x)^2 & \text{(5)} \\
 \sqrt{1 - \log_3 x} \cdot \log_x 27 &= 2 & \text{(8)} & \quad \log_{4x} 25 + \log_{3x+1} 25 = 0 & \text{(7)} \\
 \log_2(2^{2x-2} + 1) - \log_2(2^{x+1} - 3) &= x - 2 & \text{(9)} & & \\
 \log_2(\log_2(4 \cdot 2^x + 5)) - 1 &= 2\log_2 \sqrt{x} & \text{(10)} & & \\
 2\log_{x^2} |5x + 2| &= 1 + \log_{x^4} 81 & \text{(11)} & & \\
 2^{2+\log_7 x} \cdot x &= 784 & \text{(12)} & & \\
 (x^2)^{\log_2 x^2} &= 16 & \text{(13)} & & \\
 5^{1+\log_4 x} \cdot \pi^{\log_\pi x} &= 40000 & \text{(14)} & &
 \end{aligned}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{aligned}
 2, 5 & \text{(3)} & \sqrt[5]{2}, 2 & \text{(2)} & 625, 5 & \text{(1)} \\
 \frac{1}{6} & \text{(6)} & 2 & \text{(5)} & 10^5 & \text{(4)} \\
 2 & \text{(9)} & \sqrt[4]{27} & \text{(8)} & 2 & \text{(7)} \\
 49 & \text{(12)} & -\frac{1}{4} & \text{(11)} & \log_2 5 & \text{(10)} \\
 & & 64 & \text{(14)} & \pm 0.5, \pm 2 & \text{(13)}
 \end{aligned}$$