

מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 2 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות.....1
2. חוקי הלוגריתמים.....3
3. הלוגריתם הטבעי.....5
4. משוואות עם בסיסים שונים.....7
5. אי-שוויונים לוגריתמים.....8

הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות

סיכום כללי

הגדרה

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, כאשר: $a, b > 0, a \neq 1$.

הסבר

לוגריתם על בסיס a של b מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את a , על מנת שיהיה שווה ל- b . ערך חזקה זו הוא x .
 ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס.
 נחשב ערכי לוגריתמים ונפתור משוואות לוגריתמיות על ידי מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

כללים יסודיים בלוגריתמים

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$, לכל $a > 0, a \neq 1$.

שאלות

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x + 4) = 2$

3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

ב. $\log_8(x^4 - 73) = 1$

א. $\log_6(4x - 2) = 1$

ג. $\log_3 \frac{x+3}{3-3x} = -2$

4) פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה: $\log_4(\log_3 x) = 1$.

(שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים)

5) פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה: $\log_2(3^x + 37) = 6$.

(מתקבלת משוואה מעריכית)

6) פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה (הצבה): $(\log_2 x)^4 = 10000$.

תשובות סופיות

1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2

ו. 4 ז. -1.5

2) א. $x = \frac{1}{2}$ ב. $x = 65,536$ ג. $x = 27$ ד. $x = 4$

ה. $x = 5$ ו. $x = 4$

3) א. $x = 2$ ב. $x = \pm 3$ ג. $x = -2$

4) $x = 81$

5) $x = 3$

6) $x = 1024, \frac{1}{1024}$

חוקי הלוגריתמים:

סיכום כללי:

- להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a > 0 \neq 1$ וארגומנטים x ו- y חיוביים:
- מכפלה לסכום: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
 - מנה להפרש: $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$.
 - מקדם למעריך: $\log_a b^n = n \log_a b$ (כאשר $b > 0$ ו- n מספר ממשי כלשהו).

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

- (1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):
- א. $\log_3 12 + \log_3 2.25$
 ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$
 ג. $\log_2 200 - \log_2 100$

- (2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):
- א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$
 ב. $\frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2}$

משוואות לוגריתמיות:

- (3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):
- א. $\log_2 x + \log_2 (x-6) = 4$
 ב. $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$

- (4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):
- א. $\log_5 (4x-3) = \log_5 7$
 ב. $2 \log_2 (2x-2) - \log_2 (16-x) = \log_2 (x-1) + 1$

(5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_3(3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3(5^x - 3)$

תשובות סופיות:

(1) א. 3 ב. -3 ג. 1

(2) א. $\frac{4}{3}$ ב. -3

(3) א. $x = 8$ ב. $x = 3, \frac{1}{27}$

(4) א. $x = 2.5$ ב. $x = 6$

(5) $x = 1$

הלוגריתם הטבעי

סיכום כללי

לוגריתם על בסיס e (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ ונקרא הלוגריתם הטבעי.

למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן.

מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \rightarrow e^b = a$, כאשר $a > 0$ ו- b מספרים.

שאלות

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\ln e^2 \quad \text{א.} \quad \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ב.} \quad \ln \frac{1}{e\sqrt{e}} \quad \text{ג.}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\ln x = 2 \quad \text{א.} \quad \ln x = -\frac{1}{2} \quad \text{ב.}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{aligned} \ln \left(e^{2x} - \frac{1}{2} \right) + \ln 2 = x \quad \text{א.} \\ 3 \ln^2 x + \ln x = 2 \quad \text{ב.} \\ \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2) \quad \text{ג.} \end{aligned}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

$$\left(\frac{1}{x} \right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x} \quad \text{ב.} \quad x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{א.}$$

(5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$e^{\ln 3} \quad \text{א.} \quad e^{2\ln 3} \quad \text{ב.}$$

תשובות סופיות

$$\text{(1) א. 2 ב. -4 ג. -1.5}$$

$$\text{(2) א. } x = e^2 \text{ ב. } x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\text{(3) א. } x = 0 \text{ ב. } x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e} \text{ ג. } x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$$

$$\text{(4) א. } x = e^3, \frac{1}{e^2} \text{ ב. } x = \sqrt{e}, e$$

$$\text{(5) א. 3 ב. 9}$$

משוואות עם בסיסים שונים:

סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$. במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x = \log_3 4$. את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x = 6$ ב. $2^x - 9 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי): $e^{3x} = 3$

תשובות סופיות:

(1) א. $x = \log_3 6 = 1.63$ ב. $x = \log_2 9 = 3.17$

(2) $x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36$

אי-שוויונים לוגריתמים

סיכום כללי

פתרון אי-השוויון $\log_a x > \log_a y$ הוא $x > y$, עבור $a > 1$, ו- $x < y$ עבור $0 < a < 1$.

שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$\ln x \geq \ln(x^2 - 12) \quad (2)$$

$$\ln^2 x - 6 \ln x < 7 \quad (4)$$

$$\log_2 x < \log_2(5x - 20) \quad (1)$$

$$\ln x < 3 \quad (3)$$

$$\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x} \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$2\sqrt{3} < x \leq 4 \quad (2)$$

$$\frac{1}{e} < x < e^7 \quad (4)$$

$$x > 5 \quad (1)$$

$$0 < x < e^3 \quad (3)$$

$$x \neq 1 \text{ וגם } \frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2 \quad (5)$$