סדנת ריענון במתמטיקה למדעי החברה

פרק 4 - חוקי החזקות והשורשים, משוואות ואי שוויונות מעריכיים

תוכן העניינים

1. חוקי החזקות 1
2. חוקי השורשים 5
3. משוואות מעריכיות 8
4. משוואות עם חיבור וחיסור איברים 9
5. משוואות עם קבוע אוילר 11
6. אי שוויונים מעריכיים 12

חוקי החזקות

סיכום כללי

סיכום חוקי החזקות

1. $a^0=1$
2. $a^1=a$
3. $a^n\cdot a^m=a^{m+n}$
4. $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$
5. $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$
6. $a^m\cdot b^m=\left(a\cdot b\right)^m$
7. $\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$
8. $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$
9. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m$

שאלות

1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. a^2a^6
ב. $t^3t^5t^7$
ג. $b^2b^5b^{12}b^3$
ד. $\frac{k^8}{k^3}$
ה. $\frac{n^{14}}{n^9}$
ו. $\frac{c^6}{c^2}$
ז. $\frac{a^3a^{19}}{a^{15}}$
ח. $\frac{x^{30}}{x^9x^{18}}$
ט. $\frac{y^3y^{15}}{y^4y^{14}}$
י. $3^23^33^4$
יא. $\frac{2^{16}2^2}{2^{10}}$
יב. $\frac{5^{20}5^35^{16}}{5^45^{22}5^8}$

2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. $\frac{3^42^7}{2^63^2}$
ב. $\frac{a^{10}b^{13}a^3}{b^4b^6b^2a^{12}}$
ג. $\frac{x^8y^5y^9x^2}{y^4x^4}$

3) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3\cdot2^7}{2^4\cdot2^5}$
ב. $\frac{9^3\cdot27^2}{3^9\cdot81}$
ג. $\frac{10^9\cdot25^5\cdot8^{-1}}{40^3\cdot125^5}$
ד. 2^3+2^5

4) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$.

א. $\left(a^2\right)^4$ ב. $\left(c^3\right)^{10}$ ג. $\left(x^3x^{10}\right)^2$

ד. $\dfrac{\left(b^2\right)^3}{b^2b^3}$ ה. $\dfrac{n^7n^8}{\left(n^3\right)^4}$ ו. $\dfrac{d^{20}\left(d^4\right)^2}{d^{12}\left(d^3\right)^2}$

ז. $\dfrac{2^5\left(2^4\right)^2 2^3}{\left(2^32^2\right)^3}$ ח. $\dfrac{3^6\left(3^33^2\right)^6}{3^{28}\left(3^2\right)^3}$ ט. $\dfrac{\left(8^3\right)^8 8^{11}}{\left(8^28\right)^3 8^8}$

5) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\dfrac{2^4\cdot 16^5}{8\cdot 512}$ ב. $\dfrac{\left(4^2\right)^3 16}{64\cdot 2^3}$ ג. $\dfrac{\left(\left(3^4\right)^4\right)^5}{81^327^43^5}$

6) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\dfrac{\left(2a^2b\right)^3\cdot\left(ab^{-3}\right)^2}{4ab^{-2}\cdot\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^4}$ ב. $\dfrac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\dfrac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\dfrac{4^{b+3}}{4^{b+1}+4^{b+2}}$ ד. $\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{x^{n+3}+x^{n+5}}{x^{n+2}}$

7) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $\left(ab\right)^n = a^nb^n$ ו- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

א. $\left(a^2b\right)^3$ ב. $\left(m^4n^3\right)^5$ ג. $\left(x^{12}y^3\right)^3$

ד. $\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)^4$ ה. $\left(\dfrac{i^4}{k^3}\right)^7$ ו. $\left(\dfrac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3$

ז. $\left(\dfrac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6$ ח. $\left(\dfrac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2$ ט. $\left(\dfrac{\left(b^{12}c\right)^2c^{14}}{c\left(c^3b^5\right)^4b^3}\right)^2$

8) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית:

א. $\frac{1}{4^6}$ ב. $\frac{1}{5^3}$ ג. $\frac{1}{2^{10}}$

ד. $\frac{1}{8}$ ה. $\frac{1}{81}$ ו. $\frac{1}{125}$

9) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם:

א. $\frac{1}{4^{-3}}$ ב. $\frac{1}{3^{-2}}$ ג. $\frac{1}{5^{-3}}$

10) חשב את הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^{-5}\cdot 5^3\cdot 2^{14}}{5^2\cdot 5^{-10}\cdot 5^8\cdot 2^6}$ ב. $\frac{3^{-6}\cdot 7^7\cdot 7^{-4}}{3^{-4}\cdot 3^{-3}\cdot 7^3}$

11) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$ ב. $\frac{\left(4^4\right)^{-4}3^{-11}}{\left(3^{-2}4^3\right)^{-6}}$ ג. $\frac{2^{-3}5^4}{5^4\cdot 125\cdot\left(5^2 2\right)^{-3}\cdot 2^{-4}}$

12) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a^{n+2}\cdot a^{2-3n}}{\left(a^3\right)^{n+1}}$ ב. $\frac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\frac{1}{k^{7m-4}}}$ ג. $\frac{\left(m^{n+2}\right)^3\cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}}\cdot\left(m^3\right)^{n-2}}$

תשובות סופיות

1)	א. a^8	ב. t^{15}	ג. b^{22}	ד. k^5	ה. n^5	ו. c^4
	ז. a^7	ח. x^3	ט. 1	י. 3^9	יא. 2^8	יב. 5^5
2)	א. 18	ב. ab	ג. x^6y^{10}			
3)	א. 2	ב. $\frac{1}{3}$	ג. $\frac{5}{8}$	ד. 40		
4)	א. a^8	ב. c^{30}	ג. x^{26}	ד. b	ה. n^3	ו. d^{10}
	ז. 2	ח. 9	ט. 8^{18}			
5)	א. 2^{12}	ב. 2^7	ג. 3^{51}			
6)	א. $\frac{2b^3}{a}$	ב. k	ג. $3\frac{1}{5}$	ד. $\frac{1}{x}+x$		
7)	א. a^6b^3	ב. $m^{20}n^{15}$	ג. $x^{36}y^9$	ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$	ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$	ו. $a^{21}b^3$
	ז. $x^{12}y^{18}$	ח. t^4r^{12}	ט. b^2c^6.			
8)	א. 4^{-6}	ב. 5^{-3}	ג. 2^{-10}	ד. 2^{-3}	ה. 3^{-4}	ו. 5^{-3}
9)	א. 64	ב. 9	ג. 125			
10)	א. 1000	ב. 3				
11)	א. $5^{24}\cdot 3^{12}$	ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$	ג. $5^3\cdot 2^4$			
12)	א. a^{1-5n}	ב. k	ג. m^{2n+12}			

חוקי השורשים

סיכום כללי

סיכום חוקי השורשים

1. $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$
3. $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$
4. $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a\cdot b}$
5. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$
6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

שאלות

1) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

א. $3^{\frac{1}{4}}$ ב. $2^{\frac{3}{5}}$ ג. $6^{\frac{5}{6}}$

ד. $-12^{\frac{2}{7}}$ ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$ ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$

ז. $5^{-\frac{1}{4}}$ ח. $27^{-\frac{1}{3}}$ ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

2) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{49}$ ב. $-\sqrt{25}$ ג. $\sqrt[3]{8}$

ד. $-\sqrt[7]{128}$ ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$ ו. $\left(\sqrt[5]{1024}\right)^2$

ז. $\left(\sqrt[5]{-243}\right)^3$ ח. $\sqrt[4]{-16}$ ט. $\sqrt[4]{-25^2}$

י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$

3) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $8^{\frac{2}{3}}$ ב. $32^{-\frac{3}{5}}$ ג. $128^{-\frac{2}{7}}$

ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$

ז. $81^{\frac{3}{4}}\cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ ח. $343^{-\frac{2}{3}}\cdot 100^{\frac{1}{2}}$ ט. $16^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$ ג. $\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$

ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ ח. $\frac{\sqrt[3]{500}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2}\cdot\sqrt[3]{4}}$ ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2}\sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400}\sqrt{2}}$

5) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

א. $3\sqrt{2}$ ב. $5\sqrt{3}$ ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$

ד. $2\sqrt[3]{3}$ ה. $x\sqrt{x}$

6) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

א. $2\sqrt{5}$ ב. $4\sqrt[3]{2}$ ג. $2\sqrt[5]{3}$

ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$

ז. $-5\sqrt[3]{2}$ ח. $-5\sqrt[4]{2}$ ט. $-5\sqrt[5]{-2}$

7) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר:

א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$

ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

8) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן:

א. $\sqrt{40}$	ב. $\sqrt{50}$	ג. $\sqrt{320}$
ד. $\sqrt[3]{108}$	ה. $\sqrt[3]{56}$	ו. $\sqrt[5]{160}$
ז. $\sqrt[4]{162}$	ח. $\sqrt[5]{972}$	ט. $\sqrt[6]{192}$

תשובות סופיות

1)	א. $\sqrt[4]{3}$	ב. $\sqrt[5]{2^3}$	ג. $\sqrt[6]{6^5}$	ד. $-\sqrt[7]{12^2}$	ה. $-\sqrt[3]{-4}$	ו. ϕ
	ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$	ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$		ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$		
2)	א. 7	ב. -5	ג. 2	ד. -2	ה. 4	ו. 16
	ז. -27	ח. ϕ	ט. ϕ	י. 5		
3)	א. 4	ב. $\frac{1}{8}$	ג. $\frac{1}{4}$	ד. 125	ה. $\frac{32}{243}$	ו. $\frac{49}{16}$
	ז. $\frac{27}{4}$	ח. $\frac{10}{49}$	ט. $\frac{1}{2}$			
4)	א. 4	ב. 9	ג. 20	ד. 6	ה. 3	ו. 2
	ז. $\sqrt{2}$	ח. $\sqrt{5}$	ט. $\sqrt{2}$			
5)	א. $\sqrt{18}$	ב. $\sqrt{75}$	ג. $\sqrt{9}$	ד. $\sqrt[3]{24}$	ה. $\sqrt{x^3}$	
6)	א. $\sqrt{20}$	ב. $\sqrt[3]{128}$	ג. $\sqrt[5]{96}$	ד. $\sqrt{6}$	ה. $\sqrt[3]{3}$	
	ו. $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$	ז. $\sqrt[3]{-250}$	ח. $-\sqrt[4]{1250}$	ט. $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$.		
7)	א. $2\sqrt{3}$	ב. $4\sqrt{3}$	ג. $3\sqrt{7}$	ד. $3\sqrt[3]{2}$	ה. $x^2\sqrt{x}$	
8)	א. $2\sqrt{10}$	ב. $5\sqrt{2}$	ג. $8\sqrt{5}$	ד. $3\sqrt[3]{4}$	ה. $2\sqrt[3]{7}$	ו. $2\sqrt[5]{5}$
	ז. $3\sqrt[4]{2}$	ח. $3\sqrt[5]{4}$	ט. $2\sqrt[6]{3}$			

משוואות מעריכיות יסודיות

סיכום כללי

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = 1 = a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

שאלות

1) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א. $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ב. $\left(2^x \cdot 32\right)^3 = 8$

ג. $\left(5^{x^2}\right)^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

2) פתור את המשוואה הבאה (הבסיס הוא שבר): $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$.

3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א. $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$

ב. $\left(9\sqrt{27}\right)^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$

ג. $\sqrt[x]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

תשובות סופיות

1) א. $x = -\frac{1}{3}$ ב. $x = -4$ ג. $x = 1, -\frac{1}{5}$

2) $x = \frac{1}{5}$

3) א. $x = -\frac{1}{2}$ ב. $x = -8$ ג. $x = 2, -\frac{2}{3}$

משוואות עם חיבור וחיסור איברים

סיכום כללי

במשוואות הכוללות חיבור וחיסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- t, למשל במשוואה: $4^x-3\cdot 2^x=4$ נסמן: $2^x=t$.

נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות t ונפתור אותה עבורו.

לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- x המתאימים.

שאלות

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $2^x+6\cdot 2^x=56$ ב. $5\cdot 3^x-3^{x+1}=162$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $81^{x+1}+18\cdot 3^{4x-3}=735$ ב. $5^{3x+2}+4\cdot 125^x=29$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור ממעלה שנייה):

א. $9^x-36\cdot 3^x+243=0$ ב. $16^{x+1}-65\cdot 4^x+4=0$

4) פתור את המשוואה הבאה (משוואות כלליות): $\frac{20}{9^x+1}=3-\frac{8}{9^x-1}$.

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}}-6\cdot 5^{x-1.5}+1=0$ ב. $3^x-\sqrt{16\cdot 3^{x+1}}=-9$

תשובות סופיות

1) א. $x=3$ ב. $x=4$

2) א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=0$

3) א. $x=2,3$ ב. $x=1,-2$

4) $x=1,-\frac{1}{2}$

5) א. $x=\frac{1}{2},1\frac{1}{2}$ ב. $x=1,3$

משוואות עם קבוע אוילר

סיכום כללי

קבוע אוילר מסומן באות e וערכו שווה (בערך) ל-2.71828.

למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות.

דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא e זהה לחלוטין לזו של משוואה מעריכית רגילה, כפי שנלמד בפרק זה.

שאלות

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

א. $e^{3x}=e^{2x-1}$

ב. $e^{x-5}=\left(e^{1-x}\right)^3$

2) פתור את המשוואה הבאה (עם חיבור וחיסור): $e^{2x}+e^{x}-2=0$.

3) פתור את המשוואה הבאה (המשתנה גם בבסיס): $xe^{x}=\sqrt[4]{e}\cdot x$.

תשובות סופיות

1) א. $x=-1$ ב. $x=2$

2) $x=0$

3) $x=0\ ,\ \frac{1}{4}$

אי שוויונים מעריכיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי השיוויונים הבאים:

1) $3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x}$

2) $e^{\sqrt{x}+1} > e^{2x}$

3) $25^x + 5 < 6 \cdot 5^x$

הערה

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי (ln) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

4) $e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$

תשובות סופיות

1) $x < \frac{2}{3}$

2) $0 \le x < 1$

3) $0 < x < 1$

4) $x > \ln 4$ או $x < 0$