שדות אלקטרו מגנטיים

פרק 14 - חומרים דיאלקטריים

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים בסיסיים:

רקע:

הגדרות:
חומר דיאלקטרי - חומר שמכיל דיפולים.
במצב רגיל כל דיפול לכיוון שונה והשדה הממוצע בחומר הוא אפס. כשמכנסים את החומר לשדה חצוני הדיפולים מתיישרים ויוצרים שדה מנוגד לשדה החיצוני.

$\vec{E}_{free}$ - השדה של המטענים החופשיים.

$\vec{E}$ - השדה הכולל

ε_r או κ - מקדם דיאלקטרי של החומר -תכונה של החומר בדר״כ קבוע וידוע. $\varepsilon_r > 1$

ו- $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

η_i - צפיפות מטען מושרית/ קשורה. צפיפות מטען שנוצרת על שפת החומר הדיאלקטרי מהקיטוב של הדיפולים.

η_{free} - צפיפות המטען שיוצרת את השדה החיצוני.

הקשר η_{free} לשדה החופשי:

$$\eta_{free} = \varepsilon_0 \Delta E_{free_\perp}$$

η_T - צפיפות המטען הכוללת, נוסחאות:

$$\eta_T = \varepsilon_0 \Delta E_\perp \ ; \quad \eta_i = \eta_T - \eta_{free}$$

$\vec{P}$ - וקטור הפולריזציה. צפיפות הדיפולים ליחידת נפח:

$$\vec{P} = N\vec{p}_1$$

$\vec{p}_1$ - מומנט הדיפול של דיפול יחיד בחומר.

N - מספר הדיפולים ביחידת נפח. יחידות של $\left[\frac{1}{m^3}\right]$.

מומנט הדיפול הכולל של החומר (סכימה על כל הדיפולים):

$$\vec{p} = \int \vec{P}\, \mathrm{d}V$$

שימו לב לא לבלבל, $\vec{p}$ קטן ביחידות של דיפול ו $\vec{P}$- גדול ביחידות של דיפול לנפח שני דברים שונים.

צפיפות מטען מושרית על השפה:

$$\eta_i \equiv \eta_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

כאשר $\hat{n}$ הוא וקטור יחידה המאונך לשפה כלפי חוץ מהגוף.

צפיפות מטען מושרית נפחית (רק אם $\vec{P}$ לא אחיד):

$$\rho_i \equiv \rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

וקטור העתקה:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

חוק גאוס למטען החופשי:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{free} \Leftrightarrow \oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = Q_{in_{free}}$$

בחומרים ליניארים (כמעט תמיד בשאלות):

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

חומר איזוטרופי (סימטרי לכל הכיוונים):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0$$

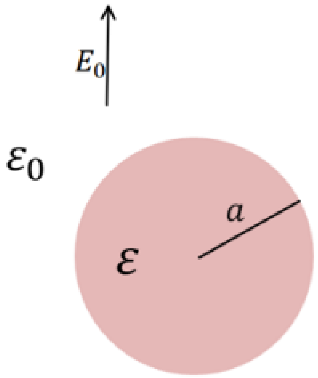
תנאי שפה לשדה והפוטנציאל:

1. $\Delta D_\perp = \eta_{free}$ או $\eta_T = \varepsilon_0 \Delta E_\perp$ אבל הראשון עדיף. עבור הפוטנציאל, נמצא את השדה המאונך דרך $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ משם $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ ונציב.

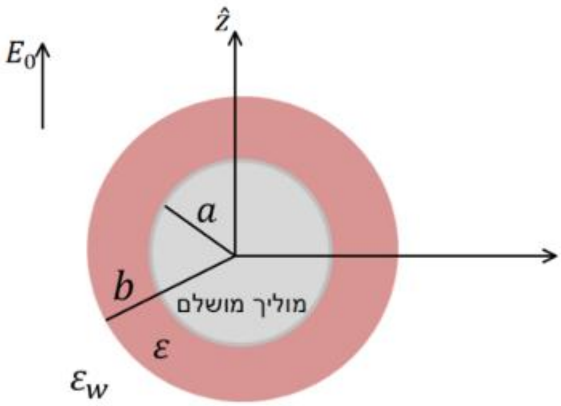
2. הפוטנציאל רציף או $\Delta E_\parallel = 0$ או $\Delta D_\parallel = \Delta P_\parallel$ בדר"כ הראשון עדיף.

שאלות:

1) כדור ברדיוס a עשוי מחומר דיאלקטרי אחיד בעל מקדם ε . הכדור נמצא בשדה אחיד E_0 . מצאו את הפוטנציאל והשדה בכל המרחב.



2) המערכת הבאה צריכה להסוות מכשיר חשמלי מגילוי בתוך מים. נניח כי המכשיר הוא כדור מוליך מושלם נייטרלי ברדיוס a . מקיפים את הכדור בשכבה בעובי $b-a$ העשוי מחומר דיאלקטרי בעל מקדם ε. המקדם הדיאלקטרי של מים הוא ε_w. בשביל לבדוק את יעילות ההסוואה שמים את המערכת בתוך שדה אחיד $E_0\hat{z}$.



א. רשמו את תנאי השפה לפונקציות הפוטנציאל במרחב.
ב. חשבו את הפוטנציאל והשדה החשמלי בכל המרחב.
ג. מצאו מה צריך להיות רדיוס השכבה b כך שמחוץ לשכבה השדה החשמלי יישאר ללא שינוי $E_0\hat{z}$.

תשובות סופיות:

1) הפוטנציאל והשדה בתוך הכדור:

$$\phi_1 = -\frac{3E_0}{2+\varepsilon_r} r \cos\varphi$$

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{3E_0}{2+\varepsilon_r}\hat{z}$$

מחוץ לכדור:

$$\phi_2 = -E_0\left(r - \frac{(\varepsilon_r - 1)a^3}{(2+\varepsilon_r)r^2}\right)\cos\varphi$$

$$\overrightarrow{E_2} = E_0\hat{z} + \frac{3p\cos\varphi\,\hat{r} - p\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

2) א.

$$(1)\ \phi_2(a) = C = 0$$

$$(2)\ \phi_2(b) = \phi_3(b)$$

$$(3)\ \Rightarrow \varepsilon_W \left.\frac{\partial\phi_3}{\partial r}\right|_b = \varepsilon \left.\frac{\partial\phi_2}{\partial r}\right|_b$$

$$(4)\ \phi_3(r\to\infty) = -E_0 z = -E_0 r\cos\varphi$$

ב.

$$\phi_3 = (Ar + Br^{-2})\cos\varphi$$

$$A = -E_0$$

$$B = \frac{E_0 b^3\left((b^3+2a^3)\varepsilon_r - (b^3 - a)\right)}{2(b^3-a^3) + (b^3+2a^3)\varepsilon_r}$$

$$\phi_2 = \left(\tilde{A}r + \tilde{B}r^{-2}\right)\cos\varphi$$

$$\tilde{A} = \frac{-3E_0 b^3}{2(b^3-a^3) + \varepsilon_r(b^3+2a^3)}$$

$$\tilde{B} = -a^3\tilde{A}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_W}$$

השדה הוא מינוס גרדיאנט של הפוטנציאל

ג.

$$b = a\left(\frac{1+2\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r}\right)^{\frac{1}{3}}$$