שדות אלקטרו מגנטיים

פרק 14 - חומרים דיאלקטריים

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים בסיסיים 1
2. תרגול נוסף 6

הרצאות ותרגילים בסיסיים:

רקע:

חומר דיאלקטרי - חומר שמכיל דיפולים

במצב רגיל כל דיפול לכיוון שונה והשדה הממוצע בחומר הוא אפס.

כשמכנסים את החומר לשדה חצוני הדיפולים מתיישרים ויוצרים שדה מנוגד לשדה החיצוני.

נסמן:

$\vec{E}_0$ או $\vec{E}_{free}$ - השדה החיצוני

$\vec{E}$ - השדה הכולל

ε_r או κ - מקדם דיאלקטרי של החומר -תכונה של החומר בדר״כ קבוע וידוע.

$$\varepsilon_r > 1$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

השדה בתוך החומר יהיה:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$

(בהנחה שהחומר לינארי ואיזוטרופי).

σ_i - צפיפות מטען מושרית/ קשורה. צפיפות מטען שנוצרת על שפת החומר הדיאלקטרי מהקיטוב של הדיפולים.

σ_{free} - צפיפות המטען שיוצרת את השדה החיצוני.

$$\sigma_{free} = \varepsilon_0 \Delta E_{0_\perp}$$

σ_T - צפיפות המטען הכוללת.

$$\sigma_T = \varepsilon_0 \Delta E_\perp$$

$$\sigma_i = \sigma_T - \sigma_{free}$$

$\vec{P}$ - וקטור הפולריזציה. צפיפות הדיפולים ליחידת נפח.

$$\vec{P} = N\vec{p}_1$$

$\vec{p}_1$ - מומנט הדיפול של דיפול יחיד בחומר.

N - מספר הדיפולים ביחידת נפח. יחידות של $\left[\frac{1}{m^3}\right]$.

מומנט הדיפול הכולל בחומר:

$$\vec{p} = \int \vec{P}\,\mathrm{d}V$$

על השפה:

$$\sigma_i \equiv \sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

כאשר $\hat{n}$ הוא וקטור יחידה המאונך לשפה כלפי חוץ מהגוף.

אם $\vec{P}$ לא אחיד אז יש גם צפיפות מטען מושרית נפחית בתוך החומר:

$$\rho_i \equiv \rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

וקטור העתקה:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \Leftrightarrow \oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = Q_{in_f}$$

בחומרים ליניארים:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

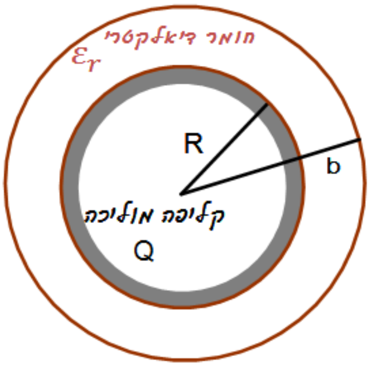
חומר איזוטרופי:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0$$

שאלות:

1) חומר דיאלקטרי מסביב לקליפה מוליכה

קליפה מוליכה (דקה) ברדיוס R טעונה במטען Q.
מסביב לקליפה נמצאת קליפה נוספת עבה עם רדיוס פנימי R ורדיוס חיצוני b.
מצא את השדה בכל המרחב ואת התפלגות המטען המושרית (קשורה).



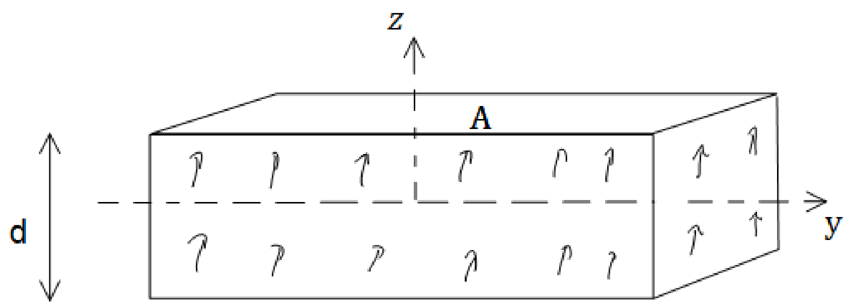
2) תיבה מקוטבת

תיבה בעלת שטח A ועובי d מקוטבת עם צפיפות קיטוב נתונה: $\vec{P} = P_0 \frac{z}{d} \hat{z}$

כאשר ראשית הצירים במרכז התיבה.

א. מצא את צפיפות המטען הקשורה (משטחית נפחית) בתיבה.

ב. מצא את סך המטען הקשור בתיבה.



3) כדור מקוטב רדיאלית

כדור ברדיוס R מקוטב לפי: $\vec{P} = A\vec{r}$ כאשר A קבוע ו- $\vec{r}$ הוא וקטור ממרכז הכדור.

א. מצא את צפיפות המטען הקשורה (משטחית ונפחית).

ב. מצא את השדה מחוץ ובתוך הכדור.

4) גליל מקוטב באופן אחיד

גליל מקוטב באופן אחיד ובמקביל לציר הסימטריה. רדיוס הגליל הוא R ואורכו L.
חשב את התפלגות המטען הקשור וצייר את קווי השדה במקרים הבאים:

א. $R \ll L$

ב. $L \ll R$

ג. $R \approx L$

5) **שדה של כדור עם צפיפות קיטוב אחידה**

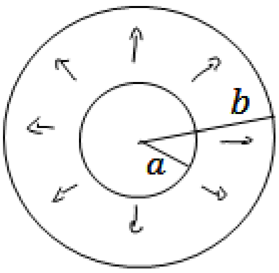
חשב את השדה של כדור מלא עם צפיפות קיטוב אחידה.

<u>הדרכה</u>: חשב את צפיפות המטען הקשור.

ניתן לתאר צפיפות מטען כזו באמצעות שני כדורים הטעונים בצפיפות מטען אחידה ליחידת נפח הנמצאים במרחק קטן אחד מהשני.

מצא מה צריכה להיות הצפיפות של כל כדור (תלויה גם במרחק הקטן) ולאחר מכן חשב את השדה בכל המרחב כסופרפוזיציה של השדות של שני הכדורים.

6) **קליפה כדורית דיאלקטרית**



קליפה כדורית בעלת רדיוס פנימי a ורדיוס חיצוני b עשויה מחומר דיאלקטרי בעל צפיפות קיטוב

נתונה: $\vec{P}(\vec{r}) = \frac{A}{r}\hat{r}$ כאשר A קבוע ו- r הוא המרחק ממרכז הקליפה.

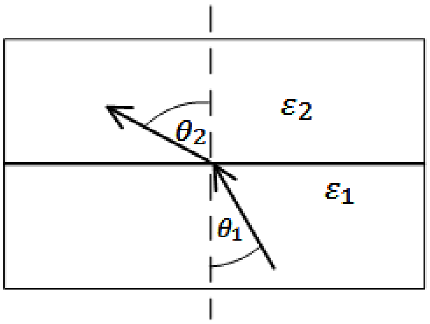
מצא את השדה בכל המרחב פעם בעזרת צפיפות המטען המושרה ופעם באמצעות השימוש בשדה ההעתקה.

7) **חוק סנל**

קרן אור מורכבת משדה חשמלי ושדה מגנטי המתקדמים במרחב, הראה כי אם קרן האור עוברת מחומר דיאלקטרי בעל מקדם ε_1 לחומר בעל מקדם דיאלקטרי ε_2 אז מתקיים חוק סנל (התעלם מהשדה המגנטי).

חוק סנל: $\tan\theta_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\tan\theta_2$

כאשר θ_1 היא זווית הפגיעה של הקרן עם האנך ו-θ_2 היא זווית השבירה עם האנך בחומר.



תשובות סופיות:

1) השדה במרחב: $\vec{E}(r)=\begin{cases}0 & r<\mathrm{R}\\ \dfrac{\mathrm{kQ}}{\varepsilon_{\mathrm{r}}r^2}\hat{r} & \mathrm{R}<r<\mathrm{b}\\ \dfrac{\mathrm{kQ}}{r^2} & \mathrm{b}<r\end{cases}$

התפלגות המטען המושרית: $\sigma_i(\mathrm{R})=\dfrac{\varepsilon_0\mathrm{kQ}}{\mathrm{R}^2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}-1\right)$, $\sigma_i(\mathrm{b})=\varepsilon_0\left(\dfrac{\mathrm{kQ}}{\mathrm{b}^2}-\dfrac{\mathrm{kQ}}{\varepsilon_{\mathrm{r}}\mathrm{b}^2}\right)$

2) א. צפיפות המטען משטחית: $\sigma_{\mathrm{b}}=\dfrac{P_0}{2}$, נפחית: $\rho_{\mathrm{b}}=-\dfrac{P_0}{\mathrm{d}}$ ב. 0

3) א. צפיפות המטען משטחית: $\sigma_{\mathrm{b}}=\mathrm{A}\cdot\mathrm{R}$, נפחית: $\rho_{\mathrm{b}}=-3\mathrm{A}$

ב. שדה בתוך הכדור: $\vec{E}=\dfrac{\mathrm{A}r}{\varepsilon_0}\hat{r}$, מחוץ לכדור: 0.

4) א. $\vec{p}=q\mathrm{L}\hat{z}$ ב. $\vec{E}=\dfrac{P_0}{\varepsilon_0}\hat{z}$ ג. ראה סרטון

5) $\vec{E}=\begin{cases}-\dfrac{P_0}{3\varepsilon_0}\hat{z} & r<\mathrm{R}\\ \dfrac{\mathrm{k}\left(3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{p}\right)}{r^3} & r>\mathrm{R}\end{cases}$

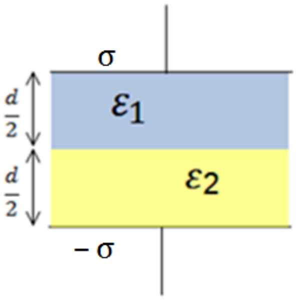
6) $\vec{E}=0$

7) שאלת הוכחה

תרגול נוסף:

שאלות:

1) חומר דיאלקטרי מפוצל בין שני לוחות



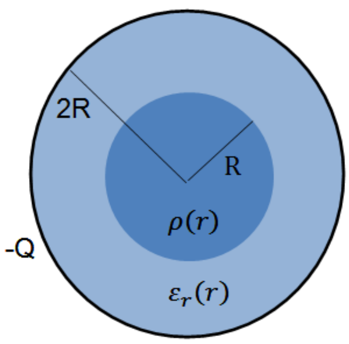
שני לוחות אינסופיים נמצאים במרחק d ביניהם,
הלוח העליון טעון σ והלוח התחתון טעון σ – .
בין הלוחות ישנם שני סוגים של חומרים דיאלקטריים
ליניאריים כפי שנראה בציור.
נתון המקדם הדיאלקטרי של כל חומר ε_1 ו- ε_2.

א. מצאו את וקטור העתקה D בכל אחד מהחומרים.
ב. מצאו את השדה החשמלי בכל מקום בין לוחות .
ג. מצאו את הפולריזציה P בכל אחד מהחומרים.
ד. מצאו את הפרש הפוטנציאל בין הלוחות.
ה. מצאו את גודל ומיקום המטען הקשור בחומרים הדיאלקטריים.
ו. מצאו שוב את השדה בכל המרחב ע"י שימוש במטענים הקשורים והחופשיים.

2) כדור דיאלקטרי טעון

כדור ברדיוס R מורכב מחומר דיאלקטרי ליניארי בעל קבוע דיאלקטרי אחיד ε_r.
בתוך החומר הדיאלקטרי ישנה צפיפות של מטען חופשי (בנוסף לחומר הדיאלקטרי עצמו) מפוזרת באופן אחיד ושווה ל- ρ.
מצאו את השדה בכל המרחב. (רמז: מצאו קודם כל את D).

3) כדור מבודד וקליפה מוליכה



כדור מבודד ברדיוס R טעון בצפיפות מטען משתנה
השווה ל- $\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}$.
מסביב לכדור ישנה קליפה מבודדת עבה בעלת
רדיוס פנימי R ורדיוס חיצוני 2R.
הקליפה עשויה מחומר דיאלקטרי עם מקדם
דיאלקטרי משתנה: $\varepsilon_r(r) = 1 + \frac{r}{R}$.
מסביב לקליפה הדיאלקטרית ישנה קליפה מוליכה
דקה ברדיוס 2R הטעונה במטען כולל $\vec{E}Q$-.

א. מצא את וקטור ההעתקה $\vec{D}$ בין כל המרחב.
ב. מצא את השדה החשמלי בכל המרחב.

ג. מהי צפיפות המטען המושרה (או קשור) בתוך החומר הדיאלקטרי (משטחית ונפחית)?

ד. מצא באמצעות סכימה מפורשת על צפיפות המטען המושרה, את סך המטען המושרה.

4) חישוב קיבול דרך אנרגיה

קבל גלילי מורכב משתי קליפות גליליות ברדיוסים R, $3R$ ובאורך $L >> 3R$. ממלאים את הקבל (המרווח בין הקליפות) בחומרים דיאלקטרים.

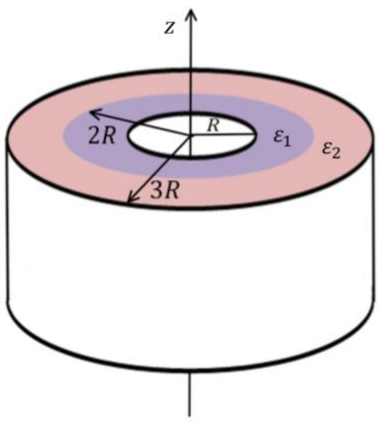
חומר בעל מקדם ε_1 ממלא את התווך בין R ל- $2R$ וחומר בעל מקדם ε_2 את התווך בין $2R$ ל- $3R$. טוענים את הקליפה הפנימית במטען Q ואת החיצונית במטען $-Q$.

א. מהי צפיפות האנרגיה בתוך הקבל כתלות במרחק ממרכז הקבל?

ב. מהי האנרגיה האגורה בקבל?

ג. חשבו את הקיבול של הקבל מתוך סעיף ב'.

ד. ניתן להתייחס לקבל כאל שני קבלים המלאים כל אחד בחומר דיאלקטרי שונה. האם הקבלים מחוברים בטור או במקביל?
חשב את הקיבול של כל קבל.



תשובות סופיות:

1) א. $\vec{D}=\sigma\hat{z}$

ב. $\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\sigma\hat{z}}{\varepsilon_1} & 0<z<\dfrac{d}{2}\\ \dfrac{\sigma\hat{z}}{\varepsilon_2} & \dfrac{d}{2}<z<d\end{cases}$

ג. $\vec{p}=\begin{cases}\left(\sigma-\dfrac{\varepsilon_0\sigma}{\varepsilon_1}\right)\hat{z} & 0<z<\dfrac{d}{2}\\ \left(\sigma-\dfrac{\varepsilon_0\sigma}{\varepsilon_2}\right)\hat{z} & \dfrac{d}{2}<z<d\end{cases}$

ד. $V=-\dfrac{d}{2}\sigma\left(\dfrac{1}{\varepsilon_1}+\dfrac{1}{\varepsilon_2}\right)$

ה. $\sigma_b(z=0)=\sigma\left(\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}-1\right)$, $\sigma_b\left(z=\dfrac{d}{2}\right)=\varepsilon_0\sigma\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2}-\dfrac{1}{\varepsilon_1}\right)$, $\sigma_b(z=d)=\sigma\left(1-\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)$

ו. $E_T=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_1}\hat{z}$

2) $\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho r}{3\varepsilon_r\varepsilon_0} & r<R\\ \dfrac{k\rho 4\pi R^3}{3r^2} & r>R\end{cases}$

3) א. $\vec{D}=\begin{cases}\dfrac{\rho_0 r^2}{4r}\hat{r} & r<R\\ \dfrac{\rho_0 4\pi R^3}{16\pi r^2}\hat{r} & R<r<2R\\ \dfrac{\rho_0\pi R^3-Q}{4\pi r^2}\hat{r} & 2R<r<\infty\end{cases}$

ב. $\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho_0 r^2}{4R\varepsilon_0}\hat{r} & r<R\\ \dfrac{\rho_0 R^3\hat{r}}{4r^2\varepsilon_0\left(\dfrac{r}{R}\right)} & R<r<2R\\ \dfrac{\rho_0\pi R^3-Q}{4\pi r^2\varepsilon_0} & 2R<r\end{cases}$

ג. $\rho_b=\dfrac{-\rho_0 R^2}{4r^2\left(1+\dfrac{r}{R}\right)^2}$, $\sigma_b(r=R)=\dfrac{-\rho_0 R}{8}$, $\sigma_b(r=2R)=\dfrac{\rho_0 R^2}{4(2R)(3)}$

ד. 0

4) א. $u=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{(2\pi rL)^2}\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon_1} & R<r<2R\\ \dfrac{1}{\varepsilon_2} & 2R<r<3R\end{cases}$

ב. $U=\dfrac{Q^2}{4\pi L}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_1}\ln 2+\dfrac{1}{\varepsilon_2}\ln\dfrac{3}{2}\right)$

ג. $C=\dfrac{2\pi L}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}\ln 2+\dfrac{1}{\varepsilon_2}\ln\dfrac{3}{2}}$

ד. $c_1=\dfrac{2\pi L\varepsilon_1}{\ln 2}$, $c_2=\dfrac{2\pi L\varepsilon_2}{\ln\dfrac{3}{2}}$.