שדות אלקטרומגנטיים

פרק 9 - חומרים דיאלקטריים

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים בסיסיים:

רקע:

הגדרות:
חומר דיאלקטרי - חומר שמכיל דיפולים.
במצב רגיל כל דיפול לכיוון שונה והשדה הממוצע בחומר הוא אפס. כשמכנסים את החומר לשדה חצוני הדיפולים מתיישרים ויוצרים שדה מנוגד לשדה החיצוני.

$\vec{E}_{free}$ - השדה של המטענים החופשיים.

$\vec{E}$ - השדה הכולל

ε_r או κ - מקדם דיאלקטרי של החומר -תכונה של החומר בדר״כ קבוע וידוע. $\varepsilon_r > 1$

ו- $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$

η_i - צפיפות מטען מושרית/ קשורה. צפיפות מטען שנוצרת על שפת החומר הדיאלקטרי מהקיטוב של הדיפולים.

η_{free} - צפיפות המטען שיוצרת את השדה החיצוני.

הקשר η_{free} לשדה החופשי:

$$\eta_{free} = \varepsilon_0 \Delta E_{free_\perp}$$

η_T - צפיפות המטען הכוללת, נוסחאות:

$$\eta_T = \varepsilon_0 \Delta E_\perp \ ; \quad \eta_i = \eta_T - \eta_{free}$$

$\vec{P}$ - וקטור הפולריזציה. צפיפות הדיפולים ליחידת נפח:

$$\vec{P} = N\vec{p}_1$$

$\vec{p}_1$ - מומנט הדיפול של דיפול יחיד בחומר.

N - מספר הדיפולים ביחידת נפח. יחידות של $\left[\frac{1}{m^3}\right]$.

מומנט הדיפול הכולל של החומר (סכימה על כל הדיפולים):

$$\vec{p} = \int \vec{P}\, \mathrm{d}V$$

שימו לב לא לבלבל, $\vec{p}$ קטן ביחידות של דיפול ו- $\vec{P}$ גדול ביחידות של דיפול לנפח שני דברים שונים.

צפיפות מטען מושרית על השפה:

$$\eta_i \equiv \eta_b = \vec{P}\cdot\hat{n}$$

כאשר $\hat{n}$ הוא וקטור יחידה המאונך לשפה כלפי חוץ מהגוף.

צפיפות מטען מושרית נפחית (רק אם $\vec{P}$ לא אחיד):

$$\rho_i \equiv \rho_b = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

וקטור העתקה :

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

חוק גאוס למטען החופשי :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{free} \Leftrightarrow \oint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = Q_{in_{free}}$$

בחומרים ליניארים (כמעט תמיד בשאלות) :

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

חומר איזוטרופי (סימטרי לכל הכיוונים):

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}_0$$

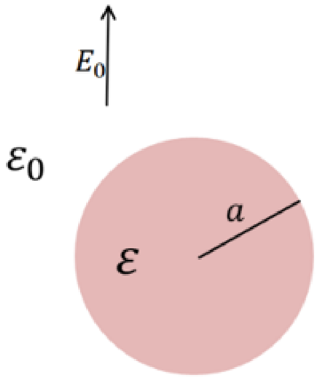
תנאי שפה לשדה והפוטנציאל :

1. $\Delta D_\perp = \eta_{\mathrm{free}}$ או $\eta_T = \varepsilon_0 \Delta E_\perp$ אבל הראשון עדיף. עבור הפוטנציאל, נמצא את השדה המאונך דרך $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ משם $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ ונציב.

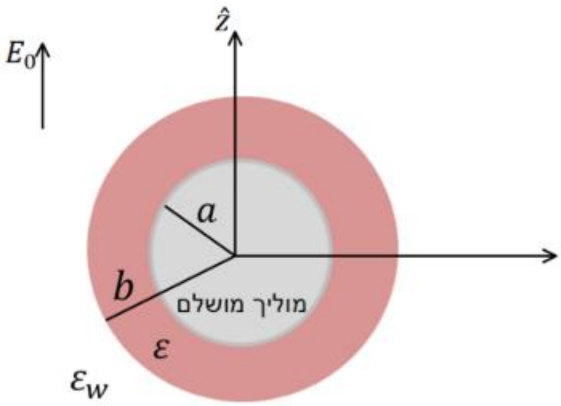
2. הפוטנציאל רציף או $\Delta E_\parallel = 0$ או $\Delta D_\parallel = \Delta P_\parallel$ בדר"כ הראשון עדיף.

שאלות:

1) כדור ברדיוס a עשוי מחומר דיאלקטרי אחיד בעל מקדם ε . הכדור נמצא בשדה אחיד E_0 . מצאו את הפוטנציאל והשדה בכל המרחב.



2) המערכת הבאה צריכה להסוות מכשיר חשמלי מגילוי בתוך מים. נניח כי המכשיר הוא כדור מוליך מושלם נייטרלי ברדיוס a . מקיפים את הכדור בשכבה בעובי $b-a$ העשוי מחומר דיאלקטרי בעל מקדם ε. המקדם הדיאלקטרי של מים הוא ε_w. בשביל לבדוק את יעילות ההסוואה שמים את המערכת בתוך שדה אחיד $E_0\hat{z}$.



א. רשמו את תנאי השפה לפונקציות הפוטנציאל במרחב.
ב. חשבו את הפוטנציאל והשדה החשמלי בכל המרחב.
ג. מצאו מה צריך להיות רדיוס השכבה b כך שמחוץ לשכבה השדה החשמלי יישאר ללא שינוי $E_0\hat{z}$.

תשובות סופיות:

1) הפוטנציאל והשדה בתוך הכדור:

$$\phi_1 = -\frac{3E_0}{2+\varepsilon_r} r \cos\varphi$$

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{3E_0}{2+\varepsilon_r}\hat{z}$$

מחוץ לכדור:

$$\phi_2 = -E_0\left(r - \frac{(\varepsilon_r - 1)a^3}{(2+\varepsilon_r)r^2}\right)\cos\varphi$$

$$\overrightarrow{E_2} = E_0\hat{z} + \frac{3p\cos\varphi\,\hat{r} - p\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

2) א.

$$(1)\ \phi_2(a) = C = 0$$

$$(2)\ \phi_2(b) = \phi_3(b)$$

$$(3)\ \Rightarrow \varepsilon_W \frac{\partial\phi_3}{\partial r}\bigg|_b = \varepsilon \frac{\partial\phi_2}{\partial r}\bigg|_b$$

$$(4)\ \phi_3(r\to\infty) = -E_0 z = -E_0 r\cos\varphi$$

ב.

$$\phi_3 = (Ar + Br^{-2})\cos\varphi$$

$$A = -E_0$$

$$B = \frac{E_0 b^3\left((b^3+2a^3)\varepsilon_r - (b^3 - a)\right)}{2(b^3-a^3) + (b^3+2a^3)\varepsilon_r}$$

$$\phi_2 = \left(\tilde{A}r + \tilde{B}r^{-2}\right)\cos\varphi$$

$$\tilde{A} = \frac{-3E_0 b^3}{2(b^3-a^3) + \varepsilon_r(b^3+2a^3)}$$

$$\tilde{B} = -a^3\tilde{A}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_W}$$

השדה הוא מינוס גרדיאנט של הפוטנציאל

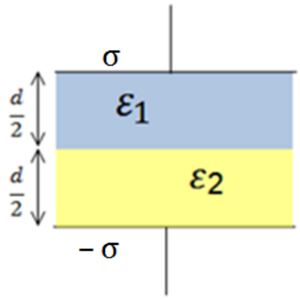
ג.

$$b = a\left(\frac{1+2\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r}\right)^{\frac{1}{3}}$$

תרגול נוסף:

שאלות:

1) חומר דיאלקטרי מפוצל בין שני לוחות



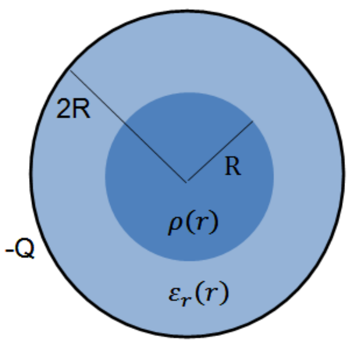
שני לוחות אינסופיים נמצאים במרחק d ביניהם,
הלוח העליון טעון σ והלוח התחתון טעון σ − .
בין הלוחות ישנם שני סוגים של חומרים דיאלקטריים ליניאריים כפי שנראה בציור.
נתון המקדם הדיאלקטרי של כל חומר ε_1 ו-ε_2.

א. מצאו את וקטור העתקה D בכל אחד מהחומרים.
ב. מצאו את השדה החשמלי בכל מקום בין לוחות .
ג. מצאו את הפולריזציה P בכל אחד מהחומרים.
ד. מצאו את הפרש הפוטנציאל בין הלוחות.
ה. מצאו את גודל ומיקום המטען הקשור בחומרים הדיאלקטריים.
ו. מצאו שוב את השדה בכל המרחב ע"י שימוש במטענים הקשורים והחופשיים.

2) כדור דיאלקטרי טעון

כדור ברדיוס R מורכב מחומר דיאלקטרי ליניארי בעל קבוע דיאלקטרי אחיד ε_r.
בתוך החומר הדיאלקטרי ישנה צפיפות של מטען חופשי (בנוסף לחומר הדיאלקטרי עצמו) מפוזרת באופן אחיד ושווה ל- ρ.
מצאו את השדה בכל המרחק. (רמז: מצאו קודם כל את D).

3) כדור מבודד וקליפה מוליכה



כדור מבודד ברדיוס R טעון בצפיפות מטען משתנה השווה ל- $\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}$.
מסביב לכדור ישנה קליפה מבודדת עבה בעלת רדיוס פנימי R ורדיוס חיצוני 2R.
הקליפה עשויה מחומר דיאלקטרי עם מקדם דיאלקטרי משתנה: $\varepsilon_r(r) = 1 + \frac{r}{R}$.
מסביב לקליפה הדיאלקטרית ישנה קליפה מוליכה דקה ברדיוס 2R הטעונה במטען כולל $\vec{E}Q$-.

א. מצא את וקטור ההעתקה $\vec{D}$ בין כל המרחב.
ב. מצא את השדה החשמלי בכל המרחב.

ג. מהי צפיפות המטען המושרה (או קשור) בתוך החומר הדיאלקטרי (משטחית ונפחית)?

ד. מצא באמצעות סכימה מפורשת על צפיפות המטען המושרה, את סך המטען המושרה.

4) חישוב קיבול דרך אנרגיה

קבל גלילי מורכב משתי קליפות גליליות ברדיוסים $R,\ 3R$ ובאורך $L >> 3R$. ממלאים את הקבל (המרווח בין הקליפות) בחומרים דיאלקטרים.

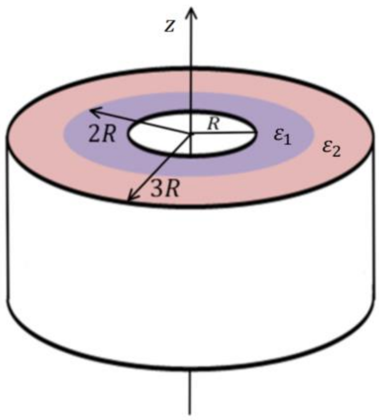
חומר בעל מקדם ε_1 ממלא את התווך בין R ל- $2R$ וחומר בעל מקדם ε_2 את התווך בין $2R$ ל- $3R$. טוענים את הקליפה הפנימית במטען Q ואת החיצונית במטען $-Q$.

א. מהי צפיפות האנרגיה בתוך הקבל כתלות במרחק ממרכז הקבל?

ב. מהי האנרגיה האגורה בקבל?

ג. חשבו את הקיבול של הקבל מתוך סעיף ב'.

ד. ניתן להתייחס לקבל כאל שני קבלים המלאים כל אחד בחומר דיאלקטרי שונה. האם הקבלים מחוברים בטור או במקביל?
חשב את הקיבול של כל קבל.



תשובות סופיות:

1) א. $\vec{D}=\sigma\hat{z}$

ב. $\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\sigma\hat{z}}{\varepsilon_1} & 0<z<\dfrac{d}{2}\\ \dfrac{\sigma\hat{z}}{\varepsilon_2} & \dfrac{d}{2}<z<d\end{cases}$

ג. $\vec{p}=\begin{cases}\left(\sigma-\dfrac{\varepsilon_0\sigma}{\varepsilon_1}\right)\hat{z} & 0<z<\dfrac{d}{2}\\ \left(\sigma-\dfrac{\varepsilon_0\sigma}{\varepsilon_2}\right)\hat{z} & \dfrac{d}{2}<z<d\end{cases}$

ד. $V=-\dfrac{d}{2}\sigma\left(\dfrac{1}{\varepsilon_1}+\dfrac{1}{\varepsilon_2}\right)$

ה. $\sigma_b(z=0)=\sigma\left(\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}-1\right)$, $\sigma_b\left(z=\dfrac{d}{2}\right)=\varepsilon_0\sigma\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2}-\dfrac{1}{\varepsilon_1}\right)$, $\sigma_b(z=d)=\sigma\left(1-\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)$

ו. $E_T=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_1}\hat{z}$

2) $\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho r}{3\varepsilon_r\varepsilon_0} & r<R\\ \dfrac{k\rho 4\pi R^3}{3r^2} & r>R\end{cases}$

3) א. $\vec{D}=\begin{cases}\dfrac{\rho_0 r^2}{4r}\hat{r} & r<R\\ \dfrac{\rho_0 4\pi R^3}{16\pi r^2}\hat{r} & R<r<2R\\ \dfrac{\rho_0\pi R^3-Q}{4\pi r^2}\hat{r} & 2R<r<\infty\end{cases}$

ב. $\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho_0 r^2}{4R\varepsilon_0}\hat{r} & r<R\\ \dfrac{\rho_0 R^3\hat{r}}{4r^2\varepsilon_0\left(\dfrac{r}{R}\right)} & R<r<2R\\ \dfrac{\rho_0\pi R^3-Q}{4\pi r^2\varepsilon_0} & 2R<r\end{cases}$

ג. $\rho_b=\dfrac{-\rho_0 R^2}{4r^2\left(1+\dfrac{r}{R}\right)^2}$, $\sigma_b(r=R)=\dfrac{-\rho_0 R}{8}$, $\sigma_b(r=2R)=\dfrac{\rho_0 R^2}{4(2R)(3)}$

ד. 0

4) א. $u=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{(2\pi rL)^2}\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon_1} & R<r<2R\\ \dfrac{1}{\varepsilon_2} & 2R<r<3R\end{cases}$

ב. $U=\dfrac{Q^2}{4\pi L}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_1}\ln 2+\dfrac{1}{\varepsilon_2}\ln\dfrac{3}{2}\right)$

ג. $C=\dfrac{2\pi L}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}\ln 2+\dfrac{1}{\varepsilon_2}\ln\dfrac{3}{2}}$

ד. $c_2=\dfrac{2\pi L\varepsilon_2}{\ln\dfrac{3}{2}}$, $c_1=\dfrac{2\pi L\varepsilon_1}{\ln 2}$.