טריגונומטריה לחט"ב

פרק 5 - זיהוי משולשים על פי קשר בין זוויות וצלעות

תוכן העניינים

1. זיהוי על פי זוויות בלבד 1
2. זיהוי על פי זוויות וצלעות יחדיו 4

זיהוי על פי זוויות בלבד:

סיכום כללי:

סגנון השאלות:

- הוכח: אם זויות המשולש α, β, γ מקיימות את התנאי XXX הרי המשולש ישר זוית.
- הוכח: אם זויות המשולש α, β, γ מקיימות את התנאי XXX הרי המשולש שווה שוקיים.
- הוכח: אם זויות המשולש α, β, γ מקיימות את התנאי XXX הרי המשולש ישר זוית או שווה שוקיים.

זהויות חשובות שחוזרות על עצמן:

במשולש מתקיים תמיד: $\alpha+\beta+\gamma=180$.

- $\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma \ , \ \sin(\beta+\gamma)=\sin\alpha \ , \ \sin(\alpha+\gamma)=\sin\beta}$
- $\boxed{\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma \ , \ \cos(\beta+\gamma)=-\cos\alpha \ , \ \cos(\alpha+\gamma)=-\cos\beta}$

מחצית מהזוויות תמיד מקיימות: $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=90$.

- $\boxed{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\frac{\gamma}{2} \ , \ \sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\cos\frac{\alpha}{2} \ , \ \sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)=\cos\frac{\beta}{2}}$.
- $\boxed{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\sin\frac{\gamma}{2} \ , \ \cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2} \ , \ \cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)=\sin\frac{\beta}{2}}$.
- חשוב לזכור את הזהויות של זווית כפולה ושל סכום והפרש זוויות ופונקציות לפתיחת הביטויים המתקבלים.

אסטרטגית פתרון:

- מביאים את המשוואה לאחת מהתבניות הבאות:

$$\sin\square=\sin\triangle \;\Rightarrow\; \square=\triangle \;,\; \square=180-\triangle$$
$$\cos\square=\cos\triangle \;\Rightarrow\; \square=\triangle \;,\; \square=-\triangle$$
$$\tan\square=\tan\triangle \;\Rightarrow\; \square=\triangle$$

- מביאים את המשוואה לתבנית $A\cdot B=0$ ואז או $A=0$ או $B=0$.
כעת, לפי הדרישה בתרגיל יש לוודא שכל אחד מהמסלולים ($A=0$ או $B=0$) מוביל למה שצריך להוכיח או לסתירה.

- בתרגילים מורכבים יותר מביאים לתבנית $A\cdot B\cdot C=0$
ואז: או $A=0$ או $B=0$ או $C=0$.
ושוב, לפי הדרישה בתרגיל יש לוודא שכל אחד מהמסלולים מוביל למה שצריך להוכיח או לסתירה.

הערה:

יש להימנע מצמצום בתהליך הפתרון.

שאלות:

1) הוכח: אם זוויות המשולש β , α מקיימות את התנאי $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}$
הרי המשולש ישר זווית או שווה שוקיים.

2) הוכח: אם זוויות המשולש γ , β , α מקיימות את התנאי $\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$
הרי המשולש שווה שוקיים.

3) הוכח: אם זוויות המשולש γ , β , α מקיימות את התנאי $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos^2\gamma=0$
הרי המשולש ישר זווית.

4) הוכח: אם זוויות המשולש γ , β , α מקיימות את התנאי $\sin\gamma-\sin\beta+\sin(\gamma-\beta)=0$
הרי המשולש שווה שוקיים.

5) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α מקיימות את התנאי $\cos\alpha+\cos\beta=\sin\gamma$
הרי המשולש ישר זוית.

6) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α מקיימות את התנאי $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\sin\gamma$
הרי המשולש ישר זוית.

7) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α מקיימות את התנאי $\dfrac{\sin(\alpha+\gamma)\cos\gamma}{\sin(\alpha+\beta)\cos\beta}=\dfrac{1-\cos 2\beta}{1-\cos 2\gamma}$
הרי המשולש ישר זוית או שווה שוקיים.

8) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α מקיימות את התנאי $\sin\alpha=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$
הרי המשולש שווה שוקיים.

9) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α מקיימות את התנאי $\sin\alpha(\cos\gamma-\cos\beta)=\sin\beta-\sin\gamma$
הרי המשולש ישר זוית או שווה שוקיים.

10) הוכח: אם זויות המשולש β , α מקיימות $\sin(\alpha-\beta)\left[\cos(\alpha+\beta)-1\right]=\cos^2\alpha-\cos^2\beta$
הרי המשולש ישר זוית או שווה שוקיים.

11) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α מקיימות את התנאי $\sin^2\gamma=\sin^2\alpha+\sin^2\beta$
הרי המשולש ישר זוית.

12) הוכח: אם זויות המשולש β , α מקיימות את התנאי $\sin\alpha-\sin\beta=\cos\alpha+\cos\beta$
הרי המשולש קהה זווית.
הדרכה: זה רק נראה מפחיד - נסו להוכיח כי אחת הזויות גדולה מ-$90°$.

זיהוי על פי זוויות וצלעות יחדיו:

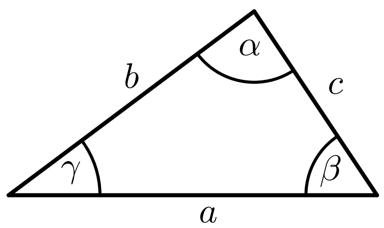
סיכום כללי:

סגנון השאלות:

הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α והצלעות מולן c , b , a בהתאמה מקיימות את התנאי XXX הרי המשולש YYY.

משפטים חשובים:

נתון משולש עם צלעות c , b , a וזוויות γ , β , α ממולן בהתאמה כמתואר באיור.
(R הוא רדיוס המעגל החוסם של המשולש).



- משפט הסינוסים: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$.
- משפט הקוסינוסים: $c^2=a^2+b^2-2ab\sin\gamma$.

שאלות:

1) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α והצלעות מולן c , b , a בהתאמה מקיימות את התנאי $a\cos\alpha=b\cos\beta$ אז המשולש הוא ישר זוית או שווה שוקיים.

2) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α והצלעות מולן c , b , a בהתאמה מקיימות את התנאי $\frac{a}{\cos\alpha}\cdot\frac{b}{\cos\beta}=4R^2$ אז המשולש הוא ישר זוית
(R רדיוס המעגל החוסם את המשולש).

3) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α והצלעות מולן c , b , a בהתאמה מקיימות את התנאי $\tan\frac{\beta}{2}=\frac{b}{a+c}$ אז המשולש הוא ישר זוית.

4) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α והצלעות מולן c , b , a בהתאמה מקיימות את התנאי $\frac{a-b}{a}=1-2\cos\gamma$ אז המשולש הוא שווה שוקיים.