

# מתמטיקה לכלכלנים

פרק 1 - וקטורים

תוכן העניינים

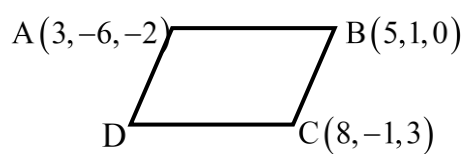
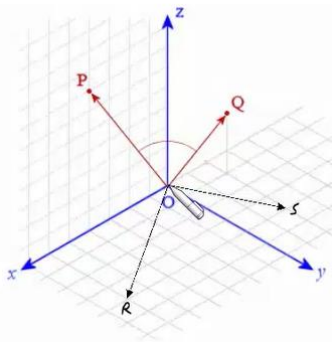
1. וקטורים.....1
2. צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית.....6

## וקטורים

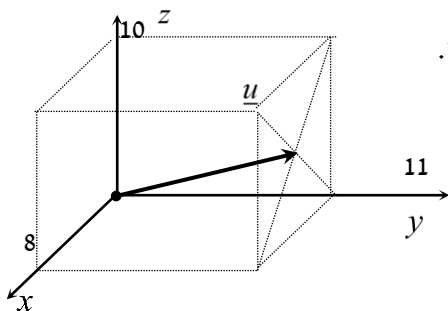
**הערת סימון:** אנו נסמן את הווקטור  $u$  כך:  $\underline{u}$ . סימונים מקובלים נוספים הם:  $\vec{u}, \vec{u}$ .  
את גודל הווקטור  $\underline{u}$  נסמן כך  $|\underline{u}|$ . סימון מקובל נוסף הוא  $\|\underline{u}\|$ .  
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

## שאלות

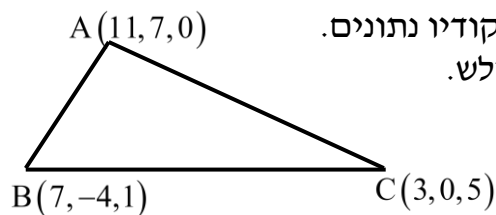
- (1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים  $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$  שבאיור. הניחו שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



- (2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצאו את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזרו בנוסחת אמצע קטע.



- (3) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים. מצאו מהו הווקטור  $\underline{u}$  על פי השרטוט.



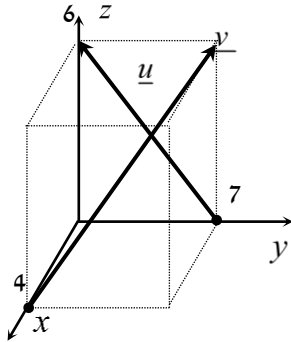
- (4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור  $\overrightarrow{EF}$ , אם נתונות הנקודות  $E(2, 0, -3)$  ו-  $F(7, -1, -3)$ .

ב. מצאו את שיעורי הנקודה  $N$ , אם נתונה הנקודה  $M(0, -4, 1)$

והווקטור  $\overrightarrow{MN} = (-1, -1, 9)$ .



(6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.

מצאו מהו הווקטור  $\underline{u}$  ומהו הווקטור  $\underline{v}$ .

(7) מצאו את  $x$ ,  $y$  ו-  $z$ , אם נתון ש-  $\underline{u} = \underline{v}$ , כאשר  $\underline{u} = (4, -1, 2)$ ,

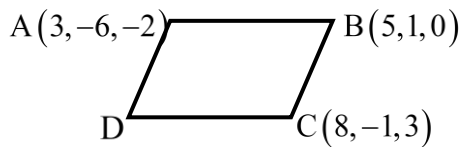
$\underline{v} = (z - 2, y + 1, x - 3)$ .

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1, 0, 2)$ ,  $B(3, 7, -4)$ ,  $C(6, 9, 0)$ ,  $D(7, 4, 10)$ ,  $E(9, 11, 4)$

א. הראו כי:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$ .

ב. האם ניתן לומר כי גם  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ? נמקו.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית,

ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.

מצאו את שיעורי הקדקוד  $D$ .

\* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים  $\underline{w} = (2, 6, -5)$ ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$ ,  $\underline{u} = (-3, 1, 4)$ .  
 \* בשאלות 13, 14, 16 הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשבו:

א.  $2\underline{u}$       ב.  $-0.5\underline{v}$       ג.  $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשבו:

א.  $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$       ב.  $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12)  $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13)  $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14)  $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15)  $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16)  $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות  $A(1, -3, 0)$ ,  $B(4, 2, -1)$ ,  $C(3, -1, 2)$ ,  
 ויש למצוא את הווקטורים:

(17)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

(18)  $2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$

(19)  $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:  
 $A(-4, 2, 1)$ ,  $B(0, 2, -1)$ ,  $C(-3, -5, 0)$ ,  $D(-7, -5, 2)$ .  
 הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

**(21)** נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :

$$A(1, 2, 0), B(-2, 5, 3), C(-1, 8, 4), D(4, 3, -1)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

**(22)** חשבו את הזווית שבין הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$ , כאשר :

א.  $\underline{u} = (-2, 2, 5), \underline{v} = (4, 0, 1)$

ב.  $\underline{u} = (6, -3, 1), \underline{v} = (2, 5, 3)$

ג.  $\underline{u} = (-2, 1, 3), \underline{v} = (4, -2, -6)$

## תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$\text{א.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{ב.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ג.} \quad (-17, 7, 24) \quad (10)$$

$$\text{א.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ב.} \quad (9.5, 9.5, -18) \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left( \frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\text{א.} \quad \alpha = 97.277^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ג.} \quad \alpha = 180^\circ \quad (22)$$

## צירופים לינאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

בשאלות 1-7 נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1 = (4, 1, 1, 5), \quad u_2 = (0, 11, -5, 3), \quad u_3 = (2, -5, 3, 1), \quad u_4 = (1, 3, -1, 2)$$

- 1) א. האם  $u_1$  הוא צירוף לינארי של  $u_4$ ?  
 ב. האם  $u_1$  שייך ל- $Sp\{u_4\}$ ?  
 ג. האם הקבוצה  $\{u_1, u_4\}$  תלויה ליניארית?
- 2) א. האם  $u_3$  הוא צירוף לינארי של  $u_1$  ו- $u_2$ ?  
 ב. האם  $u_3$  שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$ ?  
 ג. האם הקבוצה  $\{u_1, u_2, u_3\}$  תלויה ליניארית?  
 במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- 3) א. האם  $u_4$  הוא צירוף לינארי של  $u_1$  ו- $u_2$ ?  
 ב. האם  $u_4$  שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$ ?  
 ג. האם הקבוצה  $\{u_1, u_2, u_4\}$  תלויה ליניארית?  
 במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- 4) נתון  $v = (4, 12, k, -2k)$ .  
 א. מה צריך להיות ערכו של  $k$ , על מנת שהווקטור  $v$  יהיה צירוף לינארי של  $u_1$  ו- $u_2$ ?  
 ב. מה צריך להיות ערכו של  $k$ , על מנת שהווקטור  $v$  יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$ ?  
 ג. מה צריך להיות ערכו של  $k$ , על מנת שהקבוצה  $\{u_1, u_2, v\}$  תהיה תלויה ליניארית?
- 5) נתון  $v = (a, b, c, d)$ .  
 א. מה התנאים על  $a, b, c, d$ , על מנת שהווקטור  $v$  יהיה צירוף לינארי של  $u_1$  ו- $u_2$ ?  
 ב. מה התנאים על  $a, b, c, d$ , על מנת שהווקטור  $v$  יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$ ?  
 ג. מה התנאים על  $a, b, c, d$ , על מנת שהקבוצה  $\{u_1, u_2, v\}$  תהיה תלויה ליניארית?

- (6) הביעו את הווקטור  $(10, 8, 0, 14)$  כצירוף לינארי של  $u_1, u_2$  ו- $u_3$ .  
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?
- (7) הביעו את הווקטור  $(7, 10, -2, 11)$  כצירוף לינארי של  $u_1, u_2, u_3$  ו- $u_4$ .  
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?
- (8) עבור איזה ערכים של  $a, b, c$ , הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:  
 $\{(c, 2, 4), (2, 4, a, 2), (c, b, 6), (b, 2, a)\}$

### תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. כן. ב. כן. ג. כן,  $u_1 = 2u_3 + u_2, u_2 = u_1 - 2u_3$ .
- (3) א. כן. ב. כן. ג. כן,  $u_1 = 4u_4 - u_2, u_2 = 4u_4 - u_1$ .
- (4) א-ג.  $k = -4$ .
- (5)  $a = 5t + 3s, b = 4t - 13s, c = 7s, d = 7t$ .
- (6) אינסוף.
- (7) אינסוף.
- (8) לכל ערך של  $a, b, c$ .