מכינה בפיזיקה לניהול טכנולוגיה ותעשיה וניהול

פרק 4 - וקטורים

תוכן העניינים

הגדרות סימונים והצגות:

רקע:

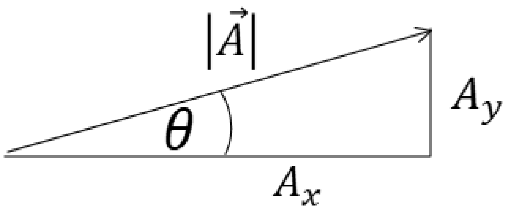
וקטור הוא כלי מתמטי המשמש לתיאור גודל פיזיקלי עם כיוון (לדוגמה מהירות או כוח).

וקטור מתארים באמצעות חץ. גודל החץ מתאר את הגודל של הערך הפיזיקאלי וכיוון החץ את כיוונו.

אין משמעות למיקום של הוקטור (בציור) מה שמגדיר את הוקטור זה רק הכיוון והגודל (ניתן להזיז את החץ בציור כל עוד שומרים על הגודל והכיוון וזה מאוד שימושי בחישובים)

הסימון של וקטור הוא בחץ מעל האות $\vec{A}$ (או לפעמים מסמנים באות מודגשת).

הצגה פולרית: הצגה לפי גודל $|\vec{A}|$ וכיוון (זווית θ עם ציר ה x החיובי).
הצגה קרטזית (אלגברית): הצגה באמצעות רכיבים.



מעבר מפולרי לקרטזי (פירוק וקטור לרכיבים):

$$A_y = |\vec{A}|\sin\theta$$

$$A_x = |\vec{A}|\cos\theta$$

(ניתן גם להגדיר זווית שאינה עם ציר ה x החיובי ואז A_x יהיה הניצב שליד הזווית ו-A_y הניצב שמול)

מעבר מקרטזי לפולרי (מציאת גודל וזווית)

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

שאלות:

1) הצגה פולרית

צייר את הוקטורים הבאים על גבי מערכת צירים:

שם הוקטור	גודל הוקטור	זווית הוקטור עם ציר ה- x
$\vec{A}$	$\lvert\vec{A}\rvert = 2$	$\theta_A = 30^\circ$
$\vec{B}$	$\lvert\vec{B}\rvert = 4$	$\theta_B = 30^\circ$
$\vec{C}$	$\lvert\vec{C}\rvert = 2$	$\theta_C = 90^\circ$
$\vec{D}$	$\lvert\vec{D}\rvert = 4$	$\theta_D = 120^\circ$
$\vec{E}$	$\lvert\vec{E}\rvert = 2$	$\theta_E = 300^\circ$
$\vec{F}$	$\lvert\vec{F}\rvert = 2$	$\theta_F = -60^\circ$

2) הצגה קרטזית

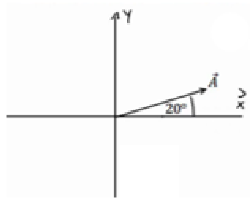
צייר על מערכת צירים את הוקטורים הבאים, רשום את רכיבי הוקטורים וציין באיזה רביע נמצא כל וקטור:

$\vec{A} = (1,2)$, $\vec{B} = (-2,3)$, $\vec{C} = (-3,-2)$, $\vec{D} = (2,-1)$.

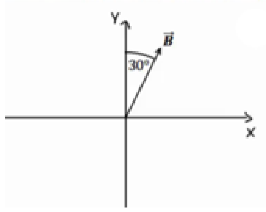
3) מעבר מפולרי לקרטזי

הגודל של כל אחד מהוקטורים הבאים הוא 2.
רשום כל אחד מהוקטורים בהצגה הקרטזית שלו (פרק את הוקטורים הבאים לרכיבים):

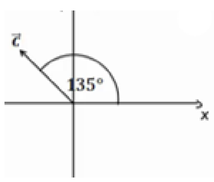
א.



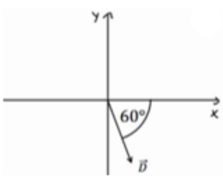
ב.



ג.



ד.

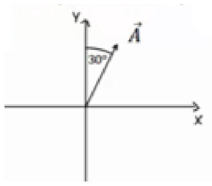


4) דרך שנייה לפירוק לרכיבים

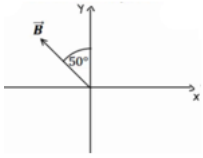
הגודל של כל אחד מהוקטורים הבאים הוא 3.

רשום כל אחד מהוקטורים הצגה הקרטזית שלו (פרק את הוקטורים הבאים לרכיבים):

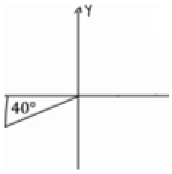
א.



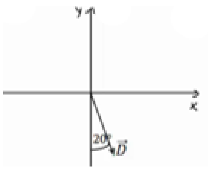
ב.



ג.



ד.

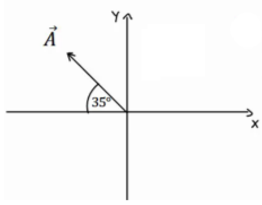


5) פירוק לרכיבים

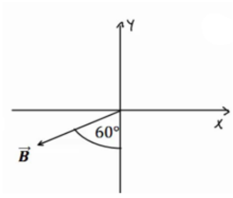
באיור הבא, גודלו של הוקטור $\vec{A}$ הוא 4, וגודלו של הוקטור $\vec{B}$ הוא 5.

מצא את הרכיבים הקרטזיים של כל וקטור:

א.



ב.



פתור פעם אחת באמצעות הזוויות שנתונות באיור, ופעם אחת באמצעות הזווית עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

6) מקרטזי לפולרי

מצא את הגודל והכיוון של הוקטורים הבאים:

א. $\vec{A}=(2,-1)$

ב. $\vec{B}=(-0.5,-2)$

7) מקרטזי לפולרי

שרטט את הוקטורים הבאים על מערכת צירים.

מצא את הגודל והכיוון של כל אחד מהוקטורים.

את הכיוון תאר ע״י הזווית של הוקטור עם ציר ה-x החיובי.

א. $\vec{A}=(2,3)$

ב. $\vec{B}=(-1,2)$

ג. $\vec{C}=(0,-3)$

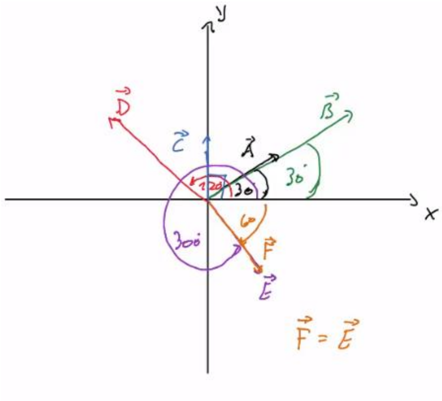
ד. $\vec{D}=(2,-2)$

ה. $|\vec{E}|=3$, $E_x=2$ הוקטור ברביע הראשון.

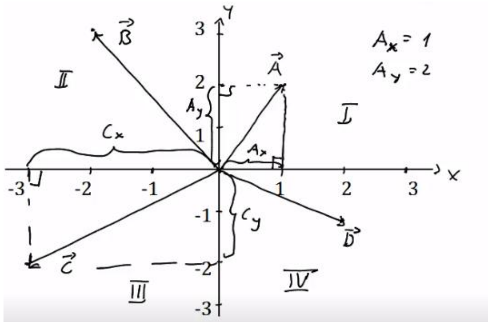
ו. $|\vec{E}|=3$, $E_y=-1$ הוקטור ברביע השלישי.

תשובות סופיות:

1) ראו שרטוט:



2) ראו שרטוט:



3) $\vec{A}=(1.88,\ 0.68)\ ,\ \vec{B}=(1,\ \sqrt{3})\ ,\ \vec{C}=(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})\ ,\ \vec{D}=(1,\ -\sqrt{3})$

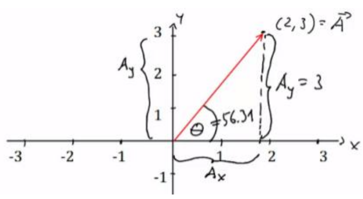
4) א. $\vec{A}=\left(\frac{3}{2},\ 2.60\right)$ ב. $\vec{B}=(-2.30,\ 1.93)$ ג. $\vec{C}=(-2.30,\ -1.93)$

ד. $\vec{D}=(-2.30,\ -1.93)$

5) א. $\vec{A}=(-3.28,\ 2.29)$ ב. $\vec{B}=(-4.33,\ -2.5)$

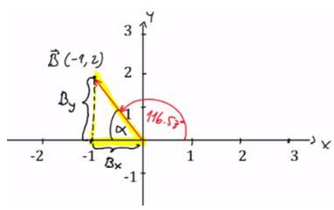
6) א. $|\vec{A}|=\sqrt{5}$; $\theta_A=-26.57=333.43°$ ב. $|\vec{B}|=2.06$; $\theta_B=255.96°$

7) א. שרטוט:



$|\vec{A}|=\sqrt{13}$; $\theta_A=56.31°$

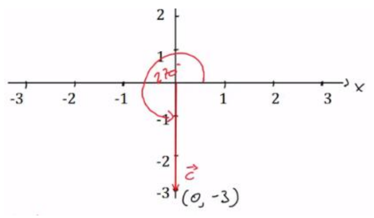
ב. שרטוט:



$|\vec{B}|=\sqrt{5}$; $\theta_B=116.57°$

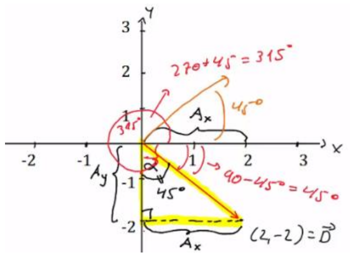
ג. שרטוט:

$\theta_C = 270° \;;\; |\vec{C}| = 3$



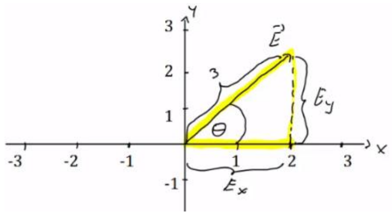
ד. שרטוט:

$\theta_D = 315° = -45° \;;\; |\vec{D}| = \sqrt{8}$



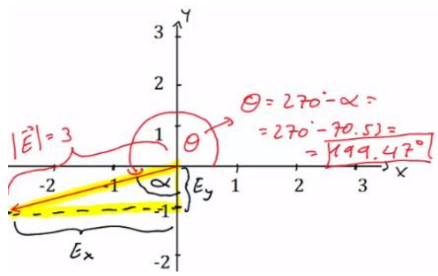
ה. שרטוט:

$\theta_E = 48.19° \;;$



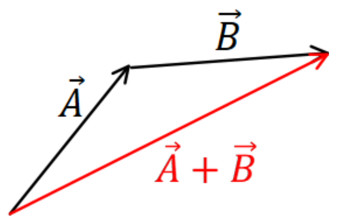
ו. שרטוט:

$\theta_E = 199.47° \;;$



פעולות בין וקטורים:

רקע:



חיבור וקטורים:
בצורה גרפית נצמיד ראש לזנב. וקטור הסכום יהיה וקטור מהזנב הראשון לראש הוקטור האחרון.
-תמיד ניתן להזיז וקטור במרחב כל עוד שומרים על האורך והכיוון שלו.

בצורה אלגברית נסכום את הרכיבים:

$$\vec{A}+\vec{B}=\left(A_x+B_x, A_y+B_y\right)$$

בצורה פולרית, נפרק לרכיבים ונסכום.

כפל/חלוקה בסקלר: בצורה אלגברית, נכפיל/נחלק כל רכיב בסקלר:

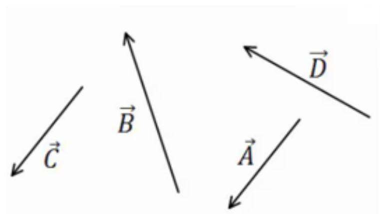
$$\vec{B}=\alpha\vec{A}=\left(\alpha A_x, \alpha A_y\right)$$

- בצורה פולרית, נכפיל/נחלק את הגודל בסקלר (הכיוון לא משתנה אלא אם הסקלר שלילי ואז הכיוון מתהפך)

שאלות:

1) **חיבור וקטורים לפי סימונים**

מצא את: $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}=\vec{E}$.



2) **דוגמה 1**

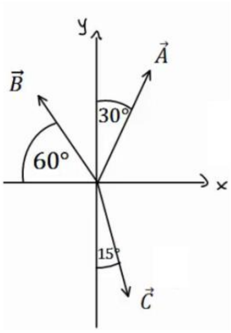
נתונים הוקטורים הבאים:

$$\left|\vec{A}\right|=3,\ \theta_A=30^\circ$$
$$\left|\vec{B}\right|=2,\ \theta_B=-30^\circ$$
$$\left|\vec{C}\right|=3,\ \theta_C=180^\circ$$

א. שרטט את הווקטורים על גבי מערכת צירים.

ב. שרטט את גודלן וכיוונו של הווקטור: $\vec{D}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$.
שרטט את הווקטור $\vec{D}$ על אותה מערכת צירים.

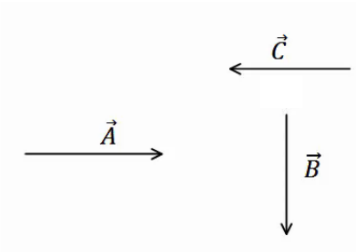
3) דוגמה 2



הגודל של הוקטורים באיור הבא הוא: $|\vec{A}|=5,\ |\vec{B}|=4,\ |\vec{C}|=5$.

מצא את הוקטור השקול (סכום הוקטורים): $\vec{D}=\vec{C}+\vec{A}+\vec{B}$.

4) חיסור לפי סימונים



בציור נתונים הוקטורים: $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$.

מצא את: $\vec{D}=\vec{B}-\vec{C}-\vec{A}$.

5) דוגמה 1

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{A}=(3,5),\vec{B}=(-1,4),\vec{C}=(0,2)$.

מצא את:

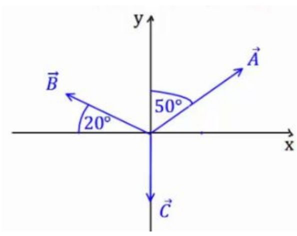
א. $\vec{D}=-2\vec{B}$

ב. $\vec{E}=3\vec{A}-2\vec{C}-\vec{B}$

ג. $\vec{F}=-2\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+3\vec{C}$

6) דוגמה 2

גודלם של הווקטורים באיור הבא הם: $|\vec{A}|=5,\ |\vec{B}|=4,\ |\vec{C}|=3$.



א. מצא את גודלו וכיוונו של $\vec{D}=-2\vec{B}$.
שרטט את $\vec{D}$ על מערכת צירים.

ב. מצא את גודלו וכיוונו של $\vec{E}=2\vec{A}-3\vec{B}-4\vec{C}$.
שרטט את $\vec{E}$ על מערכת הצירים.

7) דוגמה 3

גודלו של הווקטור $\vec{A}$ הוא 2 והזווית שהוא יוצר עם ציר ה-x החיובי היא $30°$.

א. שרטט את הוקטור במערכת הצירים.

ב. מצא את $\vec{B}=3\cdot\vec{A}$ ללא פירוק של $\vec{A}$ לרכיבים. שרטט את $\vec{B}$ על אותה מערכת.

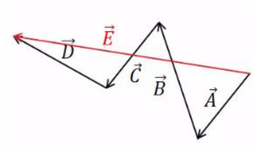
ג. מצא את הרכיבים של $\vec{A}$.

ד. חשב שוב את $\vec{B}=3\cdot\vec{A}$. הפעם דרך הרכיבים של $\vec{A}$.

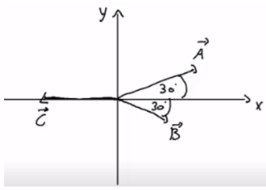
ה. מצא את גודלו וכיוונו של $\vec{B}$ מהרכיבים שמצאת בסעיף ד'.
הראה כי התוצאה זהה לסעיף ב'.

תשובות סופיות:

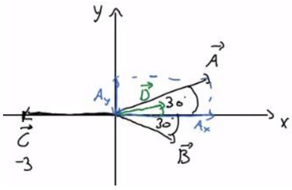
1)



2) א.

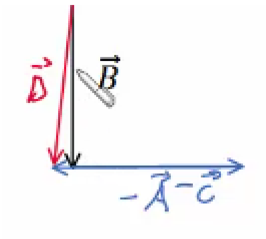


ב. $|\vec{D}| = 1.42$, $\theta_D = 20.60°$



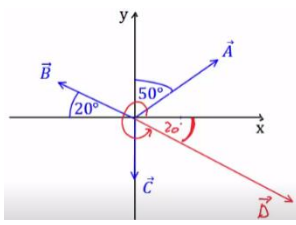
3) $|\vec{D}| = 3.46$, $\theta_D = 58.84°$

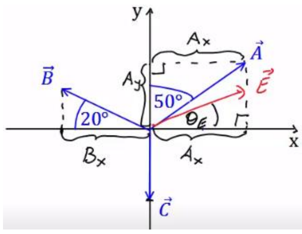
4)



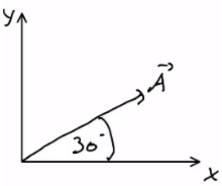
5) א. $\vec{D} = (2, -8)$ ב. $\vec{E} = (10, 7)$ ג. $\vec{F} = (-4, -12)$

6) א. $|\vec{D}| = 8$, $\theta_D = -20°$ ב. $|\vec{E}| = 23.75$, $\theta_E = 37.23°$

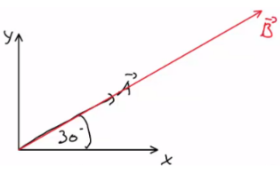




7) א.



ב. $|\vec{B}| = 6$, $\theta_B = \theta_A = 30°$



ג. $\vec{A} = (\sqrt{3}, 1)$

ד. $\vec{B} = (3\sqrt{3}, 3)$ ה. ראה סרטון.

מכפלה סקלרית:

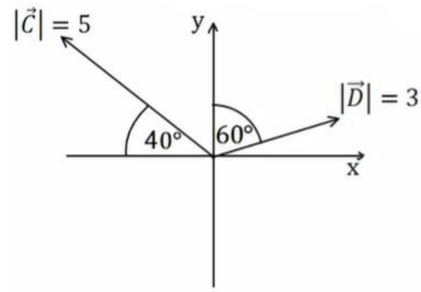
שאלות:

1) דוגמה 1

מצא את תוצאת המכפלה הסקלרית בין הוקטורים הנתונים בכל המקרים הבאים :

א. $\vec{A}=(-1,2)$, $\vec{B}=(2,2)$

ב.



2) דוגמה 2

בדוק עבור זוגות הוקטורים הבאים האם הם מאונכים :

א. $\vec{A}=(1,4)$, $\vec{B}=(-2,5)$

ב. $\vec{A}=(1,4)$, $\vec{B}=(8,-2)$

ג. $\vec{A}=(-1,-2)$, $\vec{B}=(-2,1)$

ד. שרטט כל זוג וקטורים מאונכים על מערכת צירים.
חשב את זוויות הוקטורים עם הצירים והראה שהזווית בין הוקטורים היא אכן 90 מעלות.

3) דוגמה 3

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A}=(-3,1)$, $\vec{B}=(2,-4)$.

א. מצא את תוצאת המכפלה הסקלרית באמצעות ההצגות הקרטזיות הנתונות.

ב. מצא את הגודל והזווית של כל וקטור.

ג. מצא את המכפלה הסקלרית שוב, הפעם באמצעות הנוסחה של מכפלת הגדלים בקוסינוס הזווית. בדוק כי התוצאה זהה לסעיף א'.

4) דוגמה 4

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{A}=(-3,1)$, $\vec{B}=(2,-4)$.

א. הראה כי החישוב של $\vec{A}\cdot\vec{B}$ זהה לחישוב $\vec{B}\cdot\vec{A}$.

ב. הוכח בצורה כללית כי המכפלה הסקלרית היא פעולה קומוטטיבית (הדרכה: רשום את הוקטורים בצורה כללית עם נעלמים).

5) דוגמה 5

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{A}=(2,1)$, $\vec{B}=(-3,2)$, $\vec{C}=(1,-3)$.

חשב את:

א. $\vec{A}\cdot\vec{C}$

ב. $(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C}$

ג. $\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}$

ד. $(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C}$

ה. $\vec{A}\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C})$

ו. $(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{B}$

ז. $(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C})$

6) דוגמה 6

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{A}=(-2,2)$, $\vec{B}=(1,-3)$, $\vec{C}=(1,5)$.

חשב את:

א. $\dfrac{(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{B}}{|\vec{B}|^2}$

ב. $\dfrac{(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{C}}{|\vec{C}|^2}$

7) דוגמה 7

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{A}=(-2,2)$, $\vec{B}=(1,-3)$, $\vec{C}=(1,5)$.

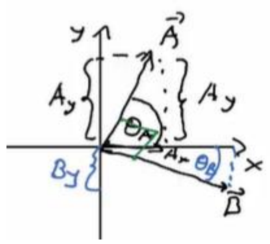
מצא את הזווית בין $\vec{A}$ ל- $\vec{B}$ ובין $\vec{B}$ ל- $\vec{C}$.

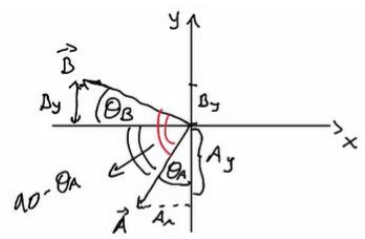
תשובות סופיות:

1) א. 2   ב. 5.13-

2) א. $\vec{A}$ לא מאונך ל- $\vec{B}$.   ב. מאונכים.   ג. מאונכים.

ד. ב. $\theta_A = 75.96°$, $\theta_B = 14.04°$.   ד. ג. $\theta_A = 26.57°$, $\theta_B = 26.57°$.





3) א. $\vec{A}\cdot\vec{B} = -10$ ב. $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{10}$, $\tilde{\theta}_A = 161.57°$, $\left|\vec{B}\right| = \sqrt{20}$, $\tilde{\theta}_B = -63.43°$

ג. $\vec{A}\cdot\vec{B} = -10$

4) א. הוכחה.   ב. הוכחה.

5) א. 1-   ב. 10-   ג. 10-   ד. (4,12-)   ה. (18,-9-)

ו. (12,-8)   ז. 36

6) א. (0.8,2.4-)   ב. (0.54,-2.69-)

7) $\alpha_{\vec{B}\vec{C}} = 150.26°$, $\alpha_{\vec{A}\vec{B}} = 153.43°$

וקטור יחידה:

שאלות:

1) דוגמה וקטור יחידה

מצא וקטורי יחידה בכיוון של הוקטורים הבאים:

א. $\vec{A}=(-2,-3)$

ב. $\vec{B}=(3,4)$

תשובות סופיות:

1) א. (-0.55,-0.83) ב. (0.6,0.8)

מכפלה וקטורית בדו-מימד:

רקע:

מכפלה וקטורית (בדו- מימד):

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\hat{z}$$

-התוצאה של מכפלה וקטורית היא תמיד וקטור!

נוסחה נוספת רק לגודל של המכפלה:

$$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \left|\sin\alpha\right|$$

שאלות:

1) דוגמה – מכפלה וקטורית

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{A} = (-4,1)$, $\vec{B} = (2,-3)$.

א. חשב את: $\vec{A} \times \vec{B}$ באמצעות ההצגות הקרטזיות הנתונות.
מהו גודל המכפלה?

ב. מצא את הגודל והזווית של כל וקטור.

ג. חשב את: $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right|$ שוב, הפעם באמצעות הנוסחה של מכפלת הגדלים בסינוס הזווית. בדוק כי התוצאה זהה לסעיף א'.

תשובות סופיות:

1) א. 10 ב. $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{17}$, $\theta_A = 165.96°$, $\left|\vec{B}\right| = \sqrt{13}$, $\theta_B = -56.31°$ ג. 10